TEKNILLINEN KORKEAKOULU **Demonstraatiot**
Tietoliikenne- ja tietoverkkotekniikan laitos **Luento 7**
S-38.1145 Liikenneteorian perusteet, Kevät 2008 7.2.2008

D7/1 Tarkastellaan piirikytkentäisen järjestelmän n-kanavaista runkoverkon linkkiä. Linkkiä syöttävät liikennelähteet generoivat uusia kutsuja Poisson-prosessin mukaisesti. Uusien kutsujen väliaika on keskimäärin t aikayksikköä ja kutsujen keskimääräinen kestoaika on h aikayksikköä.

(a) Mikä liikennemalli on kyseessä (Kendallin merkinnöin)?

(b) Laske aikaesto, kutsuesto ja kuljetettu liikenne tapauksessa $n = 2$, $t = 4$ min ja $h = 3$ min.

D7/2 Tarkastellaan piirikytkentäisen järjestelmän n-kanavaista liityntäverkon linkkiä. Linkkiä syöttää k identtistä on-off-tyyppistä käyttäjää, missä $k > n$. Käyttäjän joutojakso kestää keskimäärin t aikayksikköä, minkä jälkeen hän generoi uuden kutsun. Kutsujen keskimääräinen kestoaika on h aikayksikköä.

(a) Mikä liikennemalli on kyseessä (Kendallin merkinnöin)?

(b) Laske aikaesto, kutsuesto ja kuljetettu liikenne tapauksessa $n = 2$, $k = 4$, $t = 9$ min ja $h = 3$ min.

D7/3 Tarkastellaan kahden palvelijan puhdasta menetysjärjestelmää. Asiakkaat saapuvat systeemiin ryppäinä, joiden koko on 1 tai 2 asiakasta. Kumpikin rypäskoko on yhtä todennäköinen. Asiakasryppäitä saapuu Poisson-prosessin mukaisesti intensiteetillä λ. Asiakasrypäs menetetään kokonaan, jos systeemi on täynnä ryppään saapuessa. Jos taas systeemissä on yksi vapaa palvelija ja sinne pyrkii kahden asiakkaan rypäs, toinen asiakkaista otetaan palveluun mutta toinen menetetään. Vaikka asiakkaat saapuvat ryppäinä, heidät palvellaan yksitellen. Yksittäisen asiakkaan palveluaika noudattaa muista riippumatta Exp(μ)-jakaumaa. Merkitään $X(t)$:llä systeemissä olevien asiakkaiden lukumäärää. Kyseessä on Markov-prosessi.

(a) Piirrä $X(t)$:n tilasiirtymäkaavio.

(b) Johda $X(t)$:n tasapainojakauma.

(c) Mikä on systeemin keskimääräinen käyttöaste tapauksessa $\lambda = \mu$?

(d) Mikä on systeemin kutsuesto, ts. todennäköisyys, että saapuva asiakas menetetään, tapauksessa $\lambda = \mu$?

D7/1 (a) Kyseessä on M/G/n/n-malli eli Erlang-mallin yleistys yleiselle kutsun pitoaikajakaumalle (L7/15).

(b) Koska uusien kutsujen väliaika on keskimäärin $t = 4$ min, saapumisintensiteetti on tämän käänteisluku $\lambda = 1/t = 1/4$ kutsua/min. Näin ollen liikenneintensiteetiksi tulee $a = \lambda h = h/t = 3/4 = 0.75$ erl. Erlang-mallissa kutsuesto B_{c} ja aikaesto B_{t} ovat yhtäsuuria. Ne saadaan lakettua Erlangin kaavalla (L7/20)

$$B_{\mathrm{c}} = B_{\mathrm{t}} = \frac{\frac{a^n}{n!}}{\sum_{j=0}^{n} \frac{a^j}{j!}} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{3}{4})^2}{1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(\frac{3}{4})^2} = \frac{9}{32 + 24 + 9} = \frac{9}{65} = 0.14$$

Kuljetettu liikenne on

$$a_{\mathrm{carried}} = a(1 - B_{\mathrm{c}}) = \frac{3}{4} \cdot (1 - \frac{9}{65}) = \frac{42}{65} = 0.65\,\mathrm{erl}$$

Toisaalta kuljetettu liikenne a_{carried} voidaan Littlen kaavan mukaan tulkita keskimäärin systeemissä olevien lukumääräksi $E[X]$. Koska Erlang-mallin tasapainojakauma tunnetaan (katkaistu Poisson-jakauma, L7/18),

$$\pi_i = \frac{\frac{a^i}{i!}}{\sum_{j=0}^{n} \frac{a^j}{j!}}, \qquad i = 0, 1, 2,$$

voidaan jakauman keskiarvo laskea

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{i=0}^{n} i \cdot \pi_i = \frac{\frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(\frac{3}{4})^2} + 2 \cdot \frac{\frac{1}{2}(\frac{3}{4})^2}{1 + (\frac{3}{4}) + \frac{1}{2}(\frac{3}{4})^2} \\ &= \frac{24}{32 + 24 + 9} + 2 \cdot \frac{9}{32 + 24 + 9} = \frac{42}{65} = 0.65 \end{aligned}$$

Tulos on yhtäpitävä edellisen kanssa.

D7/2 (a) Kyseessä on M/G/n/n/k-malli eli Engset-mallin yleistys yleiselle kutsun pitoaikajakaumalle (L7/32).

(b) Yksittäisen käyttäjän joutenolojakson päättymisintesiteetti on $\nu = 1/t = 1/9$ uutta kutsua/min ja vastaavasti kutsun päättymisintensiteetti $\mu = 1/h = 1/3$ kutsua/min, joten $\nu/\mu = 3/9 = 1/3 = 0.33$. Aikaesto saadaan kaavalla (L7/36)

$$B_{\mathrm{t}} = \frac{\binom{k}{n}(\frac{\nu}{\mu})^n}{\sum_{j=0}^{n} \binom{k}{j}(\frac{\nu}{\mu})^j} = \frac{6(\frac{1}{3})^2}{1 + 4(\frac{1}{3}) + 6(\frac{1}{3})^2} = \frac{6}{9 + 12 + 6} = \frac{2}{9} = 0.22$$

Kutsuesto taas on sama kuin aikaesto sellaisessa systeemissä, missä on yksi käyttäjä vähemmän, ja saadaan Engsetin kaavalla (L7/40)

$$B_{\mathrm{c}} = \frac{\binom{k-1}{n}(\frac{\nu}{\mu})^n}{\sum_{j=0}^{n} \binom{k-1}{j}(\frac{\nu}{\mu})^j} = \frac{3(\frac{1}{3})^2}{1 + 3(\frac{1}{3}) + 3(\frac{1}{3})^2} = \frac{1}{3 + 3 + 1} = \frac{1}{7} = 0.14$$

Kuljetettu liikenne a_{carried} voidaan Littlen kaavan mukaan tulkita keskimäärin systeemissä olevien lukumääräksi $E[X]$. Koska Engset-mallin tasapainojakauma tunnetaan (katkaistu binomijakauma, L7/35),

$$\pi_i = \frac{\binom{k}{i}(\frac{\nu}{\mu})^i}{\sum_{j=0}^{n} \binom{k}{j}(\frac{\nu}{\mu})^j}, \qquad i = 0, 1, 2,$$

voidaan jakauman keskiarvo laskea

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{i=0}^{n} i \cdot \pi_i = \frac{4(\frac{1}{3})}{1+4(\frac{1}{3})+6(\frac{1}{3})^2} + 2 \cdot \frac{6(\frac{1}{3})^2}{1+4(\frac{1}{3})+6(\frac{1}{3})^2} \\ &= \frac{12}{9+12+6} + 2 \cdot \frac{6}{9+12+6} = \frac{8}{9} = 0.89 \end{aligned}$$

Kuljetetuksi liikenteeksi tulee siis $a_{\text{carried}} = E[X] = 0.89$ erl.
Huom: Engset-mallin äärellisen populaation vuoksi on syytä erottaa kaksi erilaista tarjotun liikenteen käsitettä: hypoteettinen tarjottu liikenne $a^{\mathrm{h}}_{\text{offered}}$ ja toteutuva tarjottu liikenne $a^{\mathrm{r}}_{\text{offered}}$. Luentojen (L7/35) mukaan (hypoteettinen) tarjottu liikenne on tässä tapauksessa

$$a^{\mathrm{h}}_{\text{offered}} = \frac{k\nu}{\nu+\mu} = \frac{k(\frac{\nu}{\mu})}{1+(\frac{\nu}{\mu})} = \frac{4(\frac{1}{3})}{1+(\frac{1}{3})} = 1.$$

Kyseessä on siis vastaavassa estottomassa mallissa (binomimalli eli M/G/k/k/k) kuljetettu liikenne. Tarjotun liikenteen luonnehdinta tapahtuu tässä systeemin parametreista riippumattomasti, kuten tavoitteena onkin. Toteutuva tarjottu liikenne kuitenkin poikkeaa tästä hypotettisesta arvosta tarkasteltavassa Engset-mallissa johtuen nimenomaan äärelliseen populaatioon liittyvästä takaisinkytkentämekanismista: samat asiakkaat palaavat aina uudelleen systeemiin. Toteutuva (keskimääräinen) saapumisintensiteetti on

$$\lambda^{\mathrm{r}} = \sum_{i=0}^{n} (k-i)\nu \cdot \pi_i = \cdots = \frac{28}{81},$$

joten toteutuvaksi tarjotuksi liikenneintensiteetiksi tulee

$$a^{\mathrm{r}}_{\text{offered}} = \lambda^{\mathrm{h}}/\mu = \frac{28}{27} = 1.037.$$

Sama tulos saadaan itse asiassa kaavalla

$$a^{\mathrm{r}}_{\text{offered}} = \frac{k\nu}{\nu(1-B_{\mathrm{c}})+\mu} = \frac{k(\frac{\nu}{\mu})}{1+(\frac{\nu}{\mu})(1-B_{\mathrm{c}})} = \frac{4(\frac{1}{3})}{1+(\frac{1}{3})(1-\frac{1}{7})} = \frac{28}{27} = 1.037.$$

Kuljetettu liikenne voidaan laskea tästä

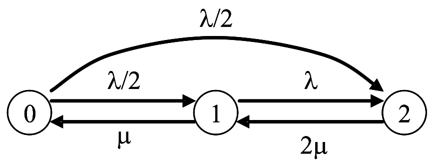
$$a_{\text{carried}} = a^{\mathrm{r}}_{\text{offered}}(1-B_{\mathrm{c}}) = \frac{28}{27}(1-\frac{1}{7}) = \frac{8}{9} = 0.89$$

D7/3 (a) Markov-prosessin $X(t)$ tilasiirtymäkaavio on esitetty kuvassa 1.

(b) Kyseessä on selvästikin pelkistymätön Markov-prosessi. Koska tila-avaruus on äärellinen, tasapainojakauma π on olemassa, ja se löytyy globaalien tasapaino-ehtojen ja normeerausehdon avulla.

Kirjoitetaan ensin globaalit tasapainoehdot (GBE) tiloille 0 ja 2:

$$\pi_0\lambda = \pi_1\mu, \quad \pi_2\, 2\mu = \pi_0\,\frac{\lambda}{2} + \pi_1\lambda$$



Kuva 1: [D7/3] Tilasiirtymäkaavio.

Tästä ratkaistaan muut todennäköisyydet π_0:n funktiona:

$$\pi_1 = \pi_0 \frac{\lambda}{\mu}, \quad \pi_2 = \pi_0 \left(\frac{1}{4}(\frac{\lambda}{\mu}) + \frac{1}{2}(\frac{\lambda}{\mu})^2 \right)$$

Puuttuva todennäköisyys π_0 selviää normeerausehdosta (N):

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = \pi_0 \left(1 + \frac{5}{4}(\frac{\lambda}{\mu}) + \frac{1}{2}(\frac{\lambda}{\mu})^2 \right) = 1,$$

joten tasapainojakaumaksi tulee

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \frac{5}{4}(\frac{\lambda}{\mu}) + \frac{1}{2}(\frac{\lambda}{\mu})^2}, \quad \pi_1 = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1 + \frac{5}{4}(\frac{\lambda}{\mu}) + \frac{1}{2}(\frac{\lambda}{\mu})^2}, \quad \pi_2 = \frac{\frac{1}{4}(\frac{\lambda}{\mu}) + \frac{1}{2}(\frac{\lambda}{\mu})^2}{1 + \frac{5}{4}(\frac{\lambda}{\mu}) + \frac{1}{2}(\frac{\lambda}{\mu})^2}$$

Kohtia (c) ja (d) varten lasketaan tasapainojakauma tapauksessa $\lambda = \mu$:

$$\pi_0 = \frac{4}{11} = 0.36, \quad \pi_1 = \frac{4}{11} = 0.36, \quad \pi_2 = \frac{3}{11} = 0.27$$

(c) Lasketaan ensin keskimäärin käytössä olevien palvelijoiden lukumäärä $E[X_\mathrm{S}]$:

$$E[X_\mathrm{S}] = \sum_{i=0}^{n} i \cdot \pi_i = \frac{4}{11} + 2 \cdot \frac{3}{11} = \frac{10}{11} = 0.91$$

Systeemin keskimääräinen käyttöaste $E[U]$ on keskimäärin käytössä olevien palvelijoiden lukumäärän suhde palvelijoiden kokonaismäärään:

$$E[U] = \frac{E[X_\mathrm{S}]}{n} = \frac{(\frac{10}{11})}{2} = \frac{5}{11} = 0.45$$

(d) Kutsuesto voidaan laskea jakamalla keskimäärin yhdestä ryppäästä menetettyjen asiakkaiden lukumäärä $E[L]$ saapuvan ryppään keskikoolla $E[A]$. Saapuvan ryppään koko on systeemin tilasta riippumaton satunnaismuuttuja, jolla on odotusarvo

$$E[A] = 1 \cdot P\{A = 1\} + 2 \cdot P\{A = 2\} = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1.50$$

Toisaalta taas Poisson-prosessin PASTA-ominaisuuden (L5/28) nojalla saapuva *rypäs* näkee systeemin tasapainossa. Näin ollen keskimäärin ryppäästä menetettävien asiakkaiden lukumäärä on

$$\begin{aligned} E[L] &= \pi_1 (1 \cdot P\{A=2\}) + \pi_2 (1 \cdot P\{A=1\} + 2 \cdot P\{A=2\}) \\ &= \pi_1 P\{A=2\} + \pi_2 E[A] = \frac{4}{11} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{11} \cdot \frac{3}{2} = \frac{13}{22} = 0.59 \end{aligned}$$

Kutsuesto B_{C} on siis tässä tapauksessa

$$B_{\mathrm{C}} = \frac{E[L]}{E[A]} = \frac{\frac{13}{22}}{\frac{3}{2}} = \frac{13}{33} = 0.39$$

Huom: Systeemin liikenneintesiteetti a on tässä tapauksessa

$$a = \frac{\lambda E[A]}{\mu} = E[A] = \frac{3}{2} = 1.50$$

Jos asiakkaat saapuisivat yksitellen, niin kutsuesto saataisiin Erlangin kaavasta (L7/20)

$$\mathrm{Erl}(n,a) = \frac{\frac{a^n}{n!}}{\sum_{j=0}^{n} \frac{a^j}{j!}} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{3}{2})^2}{1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\frac{3}{2})^2} = \frac{9}{8+12+9} = \frac{9}{29} = 0.31$$

Asiakkaiden saapuminen ryppäissä siis kasvattaa kutsuestoa.