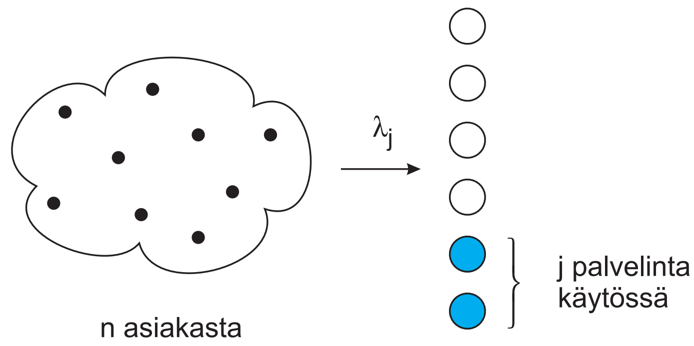
Äärellinen lähdepopulaatio: $M/M/s/s/n$-järjestelmä

Tarkastellaan estojärjestelmää (ei odotuspaikkoja) tapauksessa, jossa saapumiset tulevat äärellisestä lähdepopulaatiosta: asiakkaiden kokonaismäärä on n.



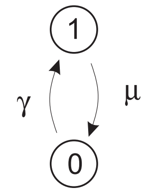
Asiakkaan malli

- Ajatellaan konkreettisuuden vuoksi, että asiakkaat ovat esim. puhelimen käyttäjiä.
- Oletetaan, että aika seuraavaan puheluyritykseen eli asiakkaan ns. “miettimisaika” noudattaa jakaumaa Exp(γ).
- Estynyt puheluyritys menetetään
  - ei johda uusintayritykseen
  - alkaa uusi miettimisaika: aika seuraavaan yritykseen $\sim$ Exp(γ)
  - pitoaika $X \sim$ Exp(μ)

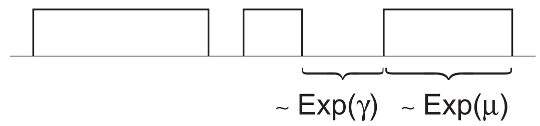
Merkitään $\boxed{\hat{a} = \gamma/\mu}$ tarjottu kuorma vapaata lähdettä kohti

Yksittäisen lähteen käytäytyminen

<u>Tapaus $s = \infty$</u> $(s \geq n)$ Jokaiselle asiakkaalle on oma palvelin.



- Systeemissä ei ole estoa; kaikki puheluyritykset onnistuvat.
- Asiakas käyttäytyy kuvan kaksitilaisen (0,1)-mallin mukaisesti. Exp(μ)-kestoinen aktiivitila (1) ja Exp(γ)-kestoinen miettimistila (0) vuorottelevat.



$$p_0 = \frac{1/\gamma}{1/\gamma + 1/\mu} = \frac{1}{1+\hat{a}}, \quad p_1 = \frac{1/\mu}{1/\gamma + 1/\mu} = \frac{\hat{a}}{1+\hat{a}}$$

- Täyden syklin (miettimisjakso + aktiivijakso) keskimääräinen kesto on $1/\gamma + 1/\mu$.
- Puheluiden saapumisnopeus (yksi per sykli) on

$$\frac{1}{1/\gamma + 1/\mu} = \frac{1/\gamma}{1/\gamma + \mu}\gamma = p_0 \gamma$$

saapumisnopeus miettimistilassa γ
miettimistilan todennäköisyys p_0

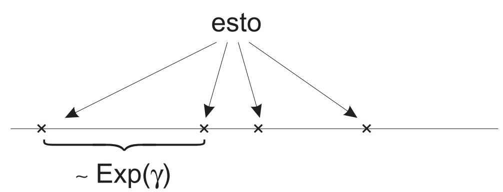
- Tarjottu kuorma = välitetty kuorma (per lähde)

$$a^{\infty} = p_1 = \frac{\hat{a}}{1+\hat{a}}$$

ns. tarkoitettu kuorma per lähde (ei estoa)

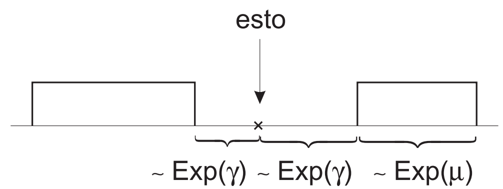
Yksittäisen lähteen käytäytyminen (jatkoa)

Tapaus $s = 0$: Ei yhtään palvelinta.



- Kaikki puheluyritykset estyvät.
- Puheluyrityksiä tulee frekvenssillä γ, joka on suurempi kuin tapauksessa $s = \infty$ ($p_0\gamma$), koska nyt asiakas on koko ajan miettimistilassa.

Tapaus $0 \leq s \leq n$: Varsinainen tutkittava tilanne.



- Asiakas vuorottelee Exp(μ)-kestoisen aktiivitilan ja yhdestä tai useammasta Exp(γ)-kestoisesta jaksosta muodostuvan miettimistilan välillä.

Järjestelmän analyysi syntymä-kuolema-prosessina

Otetaan tilamuuttujaksi järjestelmässä sisällä olevien asiakkaiden (käynnissä olevien puheluiden) lukumäärä N_t.

N_t muodostaa syntymä-kuolema-tyyppisen Markovin prosessin.

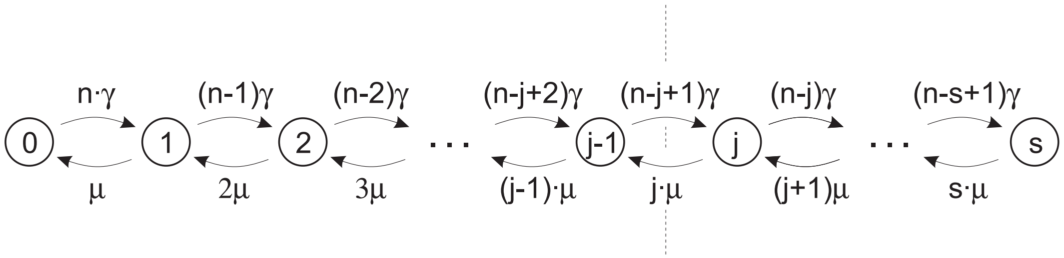
Tilamuuttuja N_t määrää (riippumatta menneisyydestä) todennäköisyydet uuden puhelun tulemiselle tai käynnissäolevan päättymiselle aikayksikköä kohden (eksponettijakaumat!).

Tilassa $N_t = j$

- $n - j$ lähdettä vapaana "miettimistilassa"
  - aika seuraavan puhelun generointiin $\sim \mathrm{Exp}((n-j)\gamma)$
  - todennäköisyys aikayksikköä kohden siirtyä yhtä suurempaan miehitystilaan $\lambda_j = (n-j)\gamma$ (tilariippuva saapumisnopeus)
  - tilassa s kaikki palvelimet ovat käytössä, joten $\lambda_s = 0$
- j puhelua käynnissä
  - aika seuraavan päättymiseen $\sim \mathrm{Exp}(j\mu)$
  - $\mu_j = j\mu$ (tilariippuva päättymisnopeus)

Tasapainotodennäköisyydet (jatkoa)

Syntymä-kuolema-prosessia kuvaa seuraava tilakaavio



Merkitsemällä todennäköisyysvirrat leikkauksen yli yhtäsuuriksi, saadaan rekursio

$$(n-j+1)\,\gamma\,\pi_{j-1} = j\mu\,\pi_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, s$$

jonka avulla kaikki todennäköisyydet voidaan palauttaa π_0:aan,

$$\pi_j = \frac{n-j+1}{j}\cdot\frac{n-j+2}{j-1}\cdots\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n}{1}\cdot\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^j \pi_0 = \binom{n}{j}\hat{a}^j\,\pi_0$$

Sovelletaan normiehtoa $\sum_{j=0}^{s}\pi_j = 1$

$$\boxed{\pi_j[n] = \frac{\binom{n}{j}\hat{a}^j}{\sum_{k=0}^{s}\binom{n}{k}\hat{a}^k}} \qquad j = 0, 1, \ldots, s$$

lähteiden lukumäärä n merkitty eksplisiittisesti näkyviin, $\pi_j[n]$

Tasapainotodennäköisyydet (jatkoa)

Merkitään $p = p_1 = a^\infty$, lähteen päälläolotodennäköisyys estottomassa tapauksessa.

$$p = \frac{\hat{a}}{1+\hat{a}} \qquad \Rightarrow \qquad \hat{a} = \frac{p}{1-p}$$

Tämän avulla tilatodennäköisyyden lauseke voidaan kirjoittaa muotoon

$$\boxed{\pi_j[n] = \frac{\binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}}{\sum_{k=0}^{s} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}} \qquad \begin{array}{l} j = 0, 1, \ldots, s \\ \\ (0 \text{ muulloin}) \end{array}$$

- Katkaistu binomijakauma (kun $s < n$)
- Binomijakauma, kun $s \geq n$
  (estoton tapaus, kukin lähde muista riippumatta päällä todennäköisyydellä p)

> Insensitiivisyys: Samalla tavalla kuin tavallisessa estojärjestelmässä tulos on insensitiivi pitoajan jakauman suhteen (vaikka nyt tehty johto nojautuikin pitoajan eksponentiaaliseksi oletettuun jakaumaan).

Aika- ja kutsuestot

Aikaesto: aikaosuus, jonka systeemi viettää tilassa s; tilan s tasapainotodennäköisyys π_s

$$\boxed{E_n(s,\hat{a}) = \frac{\binom{n}{s}\hat{a}^s}{\sum\limits_{k=0}^{s}\binom{n}{k}\hat{a}^k}}$$

Kutsuesto: todennäköisyys, jolla saapuva kutsu estyy

- Tilariippuvasta saapumisnopeudesta johtuen tuloprosessi ei ole poissoninen.
- Kutsuesto $\neq$ aikaesto
- Yleensäkin $\pi_j^*[n] \neq \pi_j[n]$, missä

$$\begin{cases} \pi_j^*[n] = \mathrm{P}\{\text{kutsun saapuessa järjestelmä on tilassa } j\} \\ \pi_j[n] = \mathrm{P}\{\text{järjestelmä on tilassa } j \text{ satunnaisella ajanhetkellä}\} \end{cases}$$

Saapuvan kutsun näkemä tilatodennäköisyys

$$\boxed{\pi_j^*[n] = \frac{\lambda_j \pi_j[n]}{\sum\limits_{k=0}^{s} \lambda_k \pi_k[n]}}$$

Perustelu: Tarkastellaan pitkää ajanjaksoa T.

- Systeemi viettää keskimäärin ajan $\pi_j[n]T$ tilassa j.
- Tänä aikana saapuu keskimäärin $\lambda_j \pi_j[n]T$ kutsua (näkevät systeemin tilassa j).
- Kaiken kaikkiaan ajassa T saapuu keskimäärin $T \sum\limits_{k=0}^{s} \lambda_k \pi_k[n]$ kutsua.
- Niiden kutsujen osuus, jotka näkevät systeemin tilassa j, on lausekkeen mukainen.

Sijoittamalla ylläolevaan lausekkeesen $\lambda_j = (n-j)\gamma$ nähdään (todistus harjoitustehtävänä)

$$\boxed{\pi_j^*[n] = \pi_j[n-1]}$$

Saapuvan asiakkaan näkemä tilajakauma on sama kuin tasapainojakauma systeemissä, jossa asiakkaita on yksi vähemmän. Saapuva asiakas on ikään kuin “ulkopuolinen tarkkailija”.

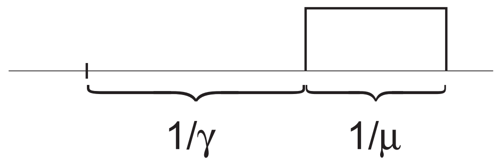
Kutsuesto:

(Engsetin kaava)

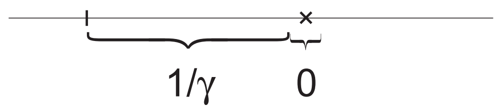
$$\boxed{B_n(s, \hat{a}) = \pi_s^*[n] = \pi_s[n-1] = \frac{\binom{n-1}{s} \hat{a}^s}{\sum\limits_{k=0}^{s} \binom{n-1}{k} \hat{a}^k}}$$

Totetunut tarjottu ja välitetty kuorma

Merkitään kutsuestoa lyhyesti B:llä.
Tarkastellaan yhtä sykliä, joka sisältää



- Miettimisjakson (keskipituus $1/\gamma$)
- Palvelujakson, joka
  - todennäköisyydellä $1-B$ on todellinen aktiivijakso (keskipituus $1/\mu$)
  - todennäköisyydellä B on surkastunut 0-kestoiseksi estotapahtumaksi



Syklin keskipituus on $\quad 1/\gamma + (1-B)\cdot 1/\mu + B \cdot 0 = 1/\gamma + (1-B)\cdot 1/\mu.$

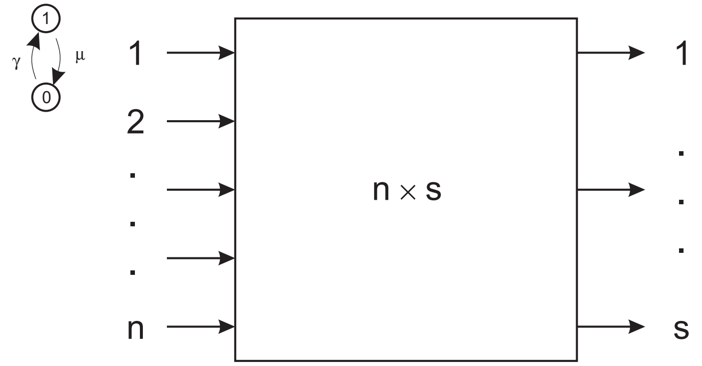
Todennäköisyys, että lähde on miettimisvaiheessa on
$$\frac{1/\gamma}{1/\gamma + (1-B)\cdot 1/\mu} = \frac{1}{1+(1-B)\hat{a}}$$

Kukin n:stä lähteestä miettimisvaiheessa ollessaan generoi uusia kutsuja nopeudella γ. Tarjottu liikenneintensiteetti a on kutsujen saapumisnopeus kertaa yhteyden pitoaika $1/\mu$.

$$\boxed{a = \frac{\hat{a}}{1+(1-B)\hat{a}}\,n}$$

Välitetty liikenneintensiteetti
$$\boxed{a_c = (1-B)a = \frac{(1-B)\hat{a}}{1+(1-B)\hat{a}}\,n} \quad = \sum_{k=0}^{s} k\,\pi_k$$

Esimerkki. Äärellisen populaation järjestelmä: keskitin



- n käyttäjää, joista kukin on yhdistetty omalla johdollaan keskittimen tulopuolelle.
- $s < n$ lähtöä; liikenne on keskitetty pinempään määrään johtoja, koska on epätodennäköistä, että kaikki käyttäjät olisivat aktiivisia samanaikaisesti.
- Samanaikainen käyttö on kuitenkin mahdollista; keskityksen määrä on mitoitettava siten, että todennäköisyys estolle on riittävän pieni.
- Esto voidaan laskea annetulla kutsueston kaavalla (Engsetin kaava).