

Markov-prosessit (Jatkuva-aikaiset Markov-ketjut)

Tarkastellaan (stationaarisia) Markov-prosesseja, joiden parametriavaruus on jatkuva (yleensä aika). Siirtymät tilasta toiseen voivat tapahtua mielivaltaisina ajanhetkinä.

- Markov-ominaisuuden vuoksi aika, jonka järjestelmä viettää annetussa tilassa, on muistiton: jäljelläolevan ajan jakauma riippuu vain ko. tilasta, muttei siitä, kauanko tilassa on jo oltu \Rightarrow aika on eksponentiaalisesti jakautunut.

Markov-prosessin X_t määrittelee täydellisesti ns. generaattorimatriisi l. siirtymänopeusmatriisi

$$q_{i,j} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P\{X_{t+\Delta t} = j \mid X_t = i\}}{\Delta t} \quad i \neq j$$

- todennäköisyys aikayksikköä kohden siirtyä tilasta i tilaan j
- siirtymänopeus l. siirtymäintensiteetti

Kokonaissiirtymänopeus pois tilasta i on

$$q_i = \sum_{j \neq i} q_{i,j} \quad | \text{tilan elinaika} \sim \text{Exp}(q_i)$$

Tällä nopeudella tilan i todennäköisyys pienenee. Määritellään

$$q_{i,i} = -q_i$$

Siirtymänopeusmatriisi ja ajasta riippuva tilatodennäköisyysvektori

Siirtymänopeusmatriisi kokonaisuudessaan on

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_{0,0} & q_{0,1} & \dots \\ q_{1,0} & q_{1,1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_0 & q_{0,1} & \dots \\ q_{1,0} & -q_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{rivisummat ovat nollia:} \\ \text{tilasta } i \text{ poistuva tn.massa siirtyy muualle} \end{array}$$

Tilatodennäköisyysvektori $\boldsymbol{\pi}(t)$ on nyt ajan funktio, joka kehittyy seuraavasti

$$\boxed{\frac{d}{dt}\boldsymbol{\pi}(t) = \boldsymbol{\pi}(t) \cdot \mathbf{Q}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\pi}(t + \Delta t) = \boldsymbol{\pi}(t) + \boldsymbol{\pi}(t) \cdot \mathbf{Q} \Delta t = \boldsymbol{\pi}(t)(\mathbf{I} + \mathbf{Q} \Delta t)$$

Siirtymätodennäköisyysmatriisi aikavälin Δt yli on $\mathbf{I} + \mathbf{Q} \Delta t$

- lähenee identiteettimatriisia \mathbf{I} , kun $\Delta t \rightarrow 0$
- \mathbf{Q} on siirtymätodennäköisyysmatriisin aikaderivaatta (siirtymänopeusmatriisi)

Muodollinen ratkaisu ajasta riippuvalle tilatodennäköisyysvektorille on

$$\boxed{\boldsymbol{\pi}(t) = \boldsymbol{\pi}(0) \cdot e^{\mathbf{Q}t}}$$

Matriisieksponentti $e^{\mathbf{A}}$ voidaan määritellä

- sarjakehitelmän avulla: $e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 + \dots$
- ominaisarvojen ja -vektorien avulla: $\mathbf{A}\mathbf{u}_i^T = z_i\mathbf{u}_i^T$ ja $\mathbf{v}_i\mathbf{A} = z_i\mathbf{v}_i$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A} = \sum_i z_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{v}_i \quad \text{ja} \quad e^{\mathbf{A}} = \sum_i e^{z_i} \mathbf{u}_i^T \mathbf{v}_i$$

Globaalit tasapainoehdot (jatkoa)

- Yhtälöt ovat riippuvia: mikä tahansa yhtälöistä on automaattisesti voimassa, jos muut ovat voimassa (“todennäköisyyden häviämättömyys”).
- Ratkaisu on määrätty vakiotekijää vaille.
- Ratkaisu tulee yksikäsitteisesti määrätynsi normiehdon kautta.

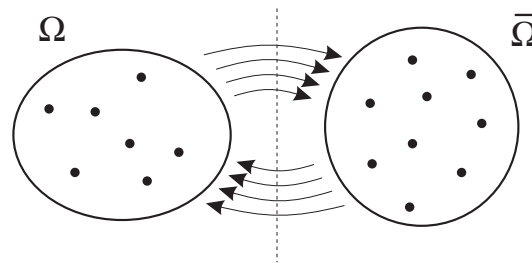
$$\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{e}^T = 1 \quad \text{eli} \quad \sum_j \pi_j = 1$$

- $\boldsymbol{\pi}$ on \mathbf{Q} :n ominaisarvoon 0 liittyvä (vasemmanpuoleinen) ominaisvektori.

Globaali tasapainoehto pätee yhtä hyvin myös tilajoukoille.

Stationaarisisessa tilassa todennäköisyysvirrat kahteen joukkoon jaettujen tilojen välillä ovat tasapainossa: Olkoot Ω ja $\bar{\Omega}$ komplementaariset tilajoukot. Tällöin

$$\sum_{i \in \Omega, j \in \bar{\Omega}} \pi_j q_{j,i} = \sum_{i \in \Omega, j \in \bar{\Omega}} \pi_i q_{i,j}$$



Tasapainoyhtälön ratkaisemisesta

Samalla tavalla kuin Markovin ketjun tapauksessa (homogeenisen) tasapainoyhtälön

$$\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{0}$$

ratkaisu, joka toteuttaa normiehdon $\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{e}^T = 1$, saadan kätevästi kirjoittamalla normiehdosta $n + 1$ kopiota

$$\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{e}$$

missä \mathbf{E} on $(n + 1) \times (n + 1)$ -matriisi, jonka kaikki alkiot ovat ykkösiä, $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

laskemalla yhtälöt yhteen, $\boldsymbol{\pi} \cdot (\mathbf{Q} + \mathbf{E}) = \mathbf{e}$, ja ratkaisemalla näin saatu epähomogeeninen yhtälö

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{Q} + \mathbf{E})^{-1}$$

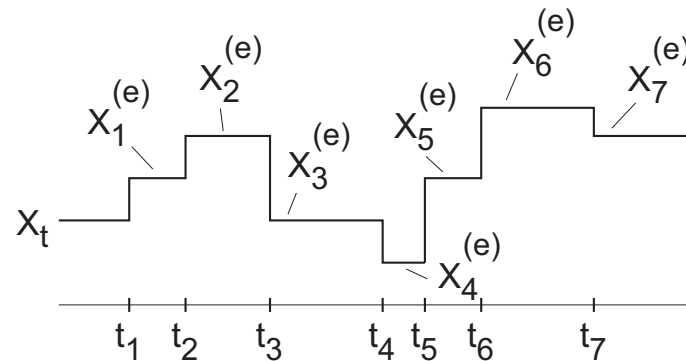
Upotettu Markovin ketju (embedded Markov chain)

Jokaiseen jatkuva-aikaiseen Markovin prosessiin X_t voidaan liittää diskreettiaikainen Markovin ketju, ns. upotettu Markovin ketju $X_n^{(e)}$.

- Huomio kiinnitetään X_t :n tilasiirtymiin (silloin kun ne tapahtuvat) eli X_t :n läpikäymien tilojen jonoon.
- Tapahtukoot X_t :n tilasiirtymät hetkillä t_0, t_1, \dots
- Määritellään $X_n^{(e)}$:n arvoksi X_t :n arvo heti hetkellä t_n tapahtuneen tilasiirtymän jälkeen (hetki t_n^+), eli X_t :n arvo välillä (t_n, t_{n+1}) .

$$X_n^{(e)} = X_{t_n^+}$$

Koska X_t on Markov-prosessi, niin näin määritelty jono $X_n^{(e)}$ muodostaa Markovin ketjun.



Upotettu Markovin ketju (jatkoa)

Markov-prosessin tilat luokitellaan vastaavasti kuin näin määritellyn Markovin ketjun tilat (transientti, absorboiva, palautuva,...).

Upotetun Markovin ketjun tilasiirtymätodennäköisyydet

$$\begin{aligned}
 p_{i,j} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} P\{X_{t+\Delta t} = j \mid X_{t+\Delta t} \neq i, X_t = i\} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P\{X_{t+\Delta t} = j, X_{t+\Delta t} \neq i \mid X_t = i\}}{P\{X_{t+\Delta t} \neq i \mid X_t = i\}} \\
 &= \begin{cases} \frac{q_{i,j}}{\sum_j q_{i,j}} & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases} \text{ vrt. } P\{\min(X_1, \dots, X_n) = X_i\} = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}, \text{ kun } X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)
 \end{aligned}$$



Markov-prosessi, siirtymänopeudet $q_{i,j}$
tasapainotodennäköisyydet π_i

Upotettu Markovin ketju, siirtymätodennäköisyydet $p_{i,j}$
tasapainotodennäköisyydet $\pi_i^{(e)}$

Upotetun Markovin ketjun tasapainotodennäköisyydet

$$\boxed{\pi_i = \frac{\pi_i^{(e)} E[T_i]}{\sum_j \pi_j^{(e)} E[T_j]}} \Leftrightarrow \boxed{\pi_i^{(e)} = \frac{\pi_i q_i}{\sum_j \pi_j q_j}} \quad E[T_i] = 1/q_i, \quad q_i = \sum_j q_{i,j}$$

π_i = aikaosuus, jonka X_t viettää tilassa i (paino $E[T_i]$)

$\pi_i^{(e)}$ = suhteellinen frekvenssi, jolla tila i esiintyy $X_n^{(e)}$:n läpikäymien tilojen jonossa (paino 1)

Huom. $\pi_i q_i$ on frekvenssi, jolla Markovin ketju X_t suorittaa hyppyjä pois tilasta i .

Systeemin ollessa tasapainossa tämä on sama kuin frekvenssi, jolla systeemi suorittaa hyppyjä tilaan i .

- Nyt on tarkasteltu kaikkien X_t :n läpikäymien tilojen jonoa $X_n^{(e)}$
- Joskus tästä jonosta voidaan sopivalla tavalla poimia osajono, joka edelleen muodostaa erään upotetun Markovin ketjun.
 - myöhemmin tullaan ns. $M/G/1$ -jonosysteemin analyysi perustamaan sopivasti valitun upotetun Markovin ketjun tarkasteluun

Semi-Markov-prosessit

Kääntäen jokaiseen Markovin ketjuun Z_n , $n = 1, 2, \dots$ voidaan liittää jatkuva-aikainen satunnaisprosessi X_t valitsemalla aika T_i , jonka X_t viettää tilassa i jostakin jakaumasta

- joka kerta muista riippumatta
- eri tiloilla jakaumat voivat olla erilaiset

ja arpomalla uusi tila Z_n :n tilasiirtymätodennäköisyyksien mukaisesti.

Näin saatua prosessia X_t kutsutaan semi-Markov-prosessiksi

- ei yleensä ole Markov-prosessi
- on Markov-prosessi silloin ja vain silloin, kun $T_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$