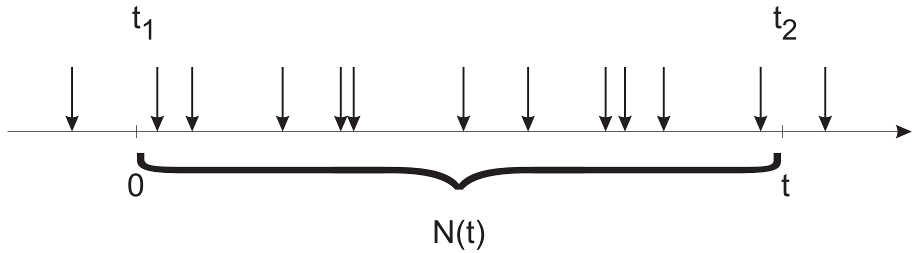
Poisson-prosessi

Yleistä

Poisson-prosessi on eräs keskeisimmistä jonoteoriassa käytetyistä malleista.

- Hyvin usein asiakkaiden saapumisprosessia jonoon kuvataan Poisson-prosessin avulla.
- Teleliikenneteoriassa "asiakkaat" ovat usein yhteyksiä (esim. puheluita) tai paketteja. Poisson-prosessi onkin hyvä malli silloin, kun yhteydet tai paketit ovat peräisin hyvin suuresta joukosta toisistaan riippumattomia käyttäjiä.

Seuraavassa voidaan konkreettisuuden vuoksi ajatella, että Poisson-proseesi kuvaa diskreettejä saapumisia.



Matemaattisesti itse prosessia kuvataan ns. laskuriprosessin N_t tai $N(t)$ avulla. Laskuriprosessi kertoo saapumisten lukumäärän aikavälissä $(0, t)$ tai yleisemmin välissä (t_1, t_2).

$$\begin{cases} N(t) = \text{saapumisten lukumäärä aikavälissä } (0,t) & \text{(tutkittava stokastinen prosessi)} \\ N(t_1,t_2) = \text{saapumisten lukumäärä aikavälissä } (t_1,t_2) & \text{(lisäysprosessi } N(t_2)-N(t_1)\text{)} \end{cases}$$

Yleistä (jatkoa)

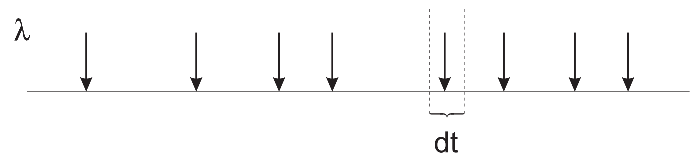
Poisson-prosessia voidaan luonnehtia eri tavoin:

- Riippumattomien lisäysten prosessi
- Puhdas syntymäposessi
  - saapumisintensiteetti λ (keskimääräinen saapumisnopeus; saapumistodennäköisyys aikayksikköä kohden
- "Satunnaisin mahdollinen" prosessi, jolla on intensiteetti λ

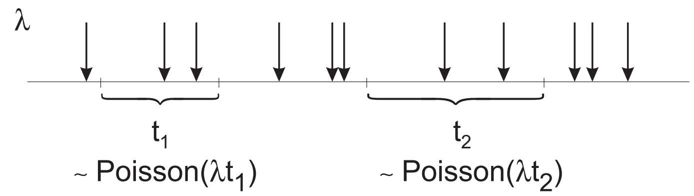
Määritelmä

Poisson-prosessi voidaan määritellä kolmella keskenään ekvivalentilla tavalla:

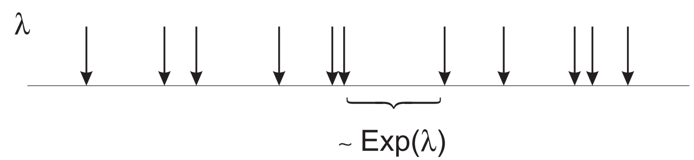
1. Poisson-prosessi on puhdas syntymäprosessi:
   Infinitesimaalisena aikavälinä dt voi tulla vain yksi saapuminen. Tämä tapahtuu todennäköisyydellä λdt täysin riippumatta saapumisista muina ajanhetkinä.



2. Saapumisten lukumäärä $N(t)$ äärellisenä aikavälinä t noudattaa Poisson(λt)-jakaumaa,
   $$\mathrm{P}\{N(t) = n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$
   Lisäksi saapumisten lukumäärät $N(t_1, t_2)$ ja $N(t_3, t_4)$ yhteispisteettömissä aikaväleissä $(t_1 \le t_2 \le t_3 \le t_4)$ ovat riippumattomia.

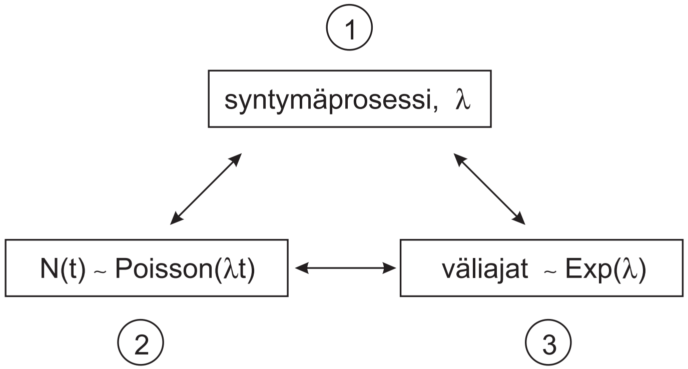


3. Saapumisten väliajat ovat toisistaan riippumattomia ja noudattavat Exp(λ)-jakaumaa:
   $$\mathrm{P}\{\text{saapumisväli} > t\} = e^{-\lambda t}$$



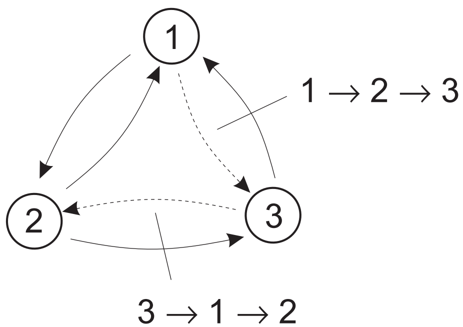
Määritelmien yhtäpitävyys

Esitetyt kolme määritelmää ovat keskenään yhtäpitävät:



Seuraavassa yhtäpitävyys osoitetaan allaolevan kuvion ehyiden nuolten osoittamien riippuvuuksien suunnissa. Tällöin mistä tahansa ominaisuudesta seuraa kaksi muuta.

Itse asiassa implikaatio $2 \rightarrow 1$ ei ole yhtäpitävyyden osoittamiseksi tarpeen (koska se seuraa implikaatioista $2 \rightarrow 3$ ja $3 \rightarrow 1$), mutta sen suora osoittaminen on helppoa.

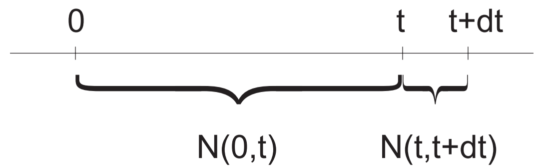


Määritelmien yhtäpitävyys $(1 \to 2)$

Osoitetaan, että ominaisuudesta 1 seuraa ominaisuus 2 (olennaisesti tämä jo osoitettiin puhtaan syntymäprosessissin kohdalla).

Oletetaan, että saapumiset eri väleissä ovat riippumattomia ja

$$\mathrm{P}\{\text{saapuminen välissä } (t, t+dt)\} = \lambda \cdot dt$$



Johdetaan yhtälö laskurin $N(0,t)$ generoivalle funktiolle $\mathcal{G}_t(z)$:

$$\mathcal{G}_t(z) = \mathrm{E}[z^{N(0,t)}]$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{t+dt}(z) &= \mathrm{E}[z^{N(0,t+dt)}] = \mathrm{E}[z^{N(0,t)+N(t,t+dt)}] = \underbrace{\mathrm{E}[z^{N(0,t)}]}_{\mathcal{G}_t(z)}\ \underbrace{\mathrm{E}[z^{N(t,t+dt)}]}_{(1-\lambda\cdot dt)z^0+\lambda\cdot dt\cdot z^1} \\
&= \mathcal{G}_t(z) - \lambda dt(1-z)\mathcal{G}_t(z)
\end{aligned}$$

$$\frac{\mathcal{G}_{t+dt}(z)-\mathcal{G}_t(z)}{dt} = \lambda(z-1)\mathcal{G}_t(z) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\mathcal{G}_t(z) = \lambda(z-1)\mathcal{G}_t(z)$$

$$\frac{d}{dt}\log\mathcal{G}_t(z) = \lambda(z-1) \quad \Rightarrow \quad \log\mathcal{G}_t(z) - \underbrace{\log\mathcal{G}_0(z)}_{0} = \lambda(z-1)t$$

$$\boxed{\mathcal{G}_t(z) = e^{(z-1)\lambda t}}$$ Poisson-jakauman generoiva funktio

Määritelmien yhtäpitävyys (2 → 1)

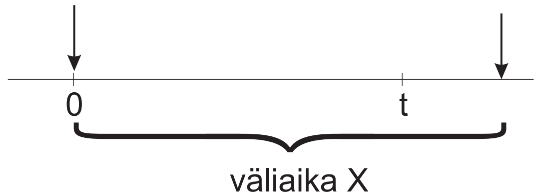
Oletetaan, että $\mathrm{P}\{N(t) = n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$. Tällöin

$$\begin{cases} \mathrm{P}\{N(dt) = 0\} = e^{-\lambda dt} = 1 - \lambda \cdot dt + \mathcal{O}(dt) \\ \mathrm{P}\{N(dt) = 1\} = \frac{\lambda \cdot dt}{1!} e^{-\lambda dt} = \lambda \cdot dt + \mathcal{O}(dt) \end{cases}$$

Lisäksi, koska ominaisuuteen 2 sisältyy saapumisten riippumattomuus yhteispisteettömissä väleissä, välissä dt tapahtuva saapuminen on riippumaton saapumisista välin ulkopuolella.

Määritelmien yhtäpitävyys (2 → 3)

Tutkitaan aikaväliä X kahden saapumisen välillä:



$$\begin{aligned} \{X > t\} \quad &\equiv \quad \{N(t) = 0\} \qquad \text{(tapahtumat ovat identtiset)} \\ \mathrm{P}\{X > t\} \quad &= \quad \mathrm{P}\{N(t) = 0\} \quad = \quad e^{-\lambda t} \\ &\Rightarrow \quad X \sim \mathrm{Exp}(\lambda) \end{aligned}$$

Määritelmien yhtäpitävyys (3 → 1)

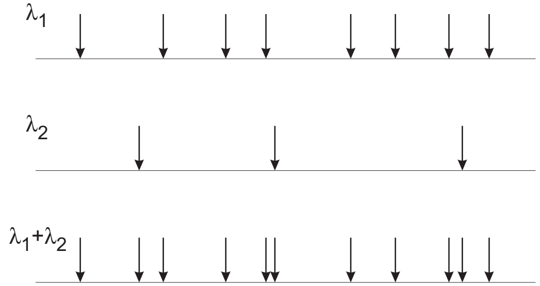
Todettiin jo eksponenttijakauman yhteydessä: Jos $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, niin todennäköisyys väliajan päättymiselle (saapumiselle) aikavälissä dt on $\lambda \cdot dt + \mathcal{O}(dt)$.

Poisson-prosessin ominaisuuksia

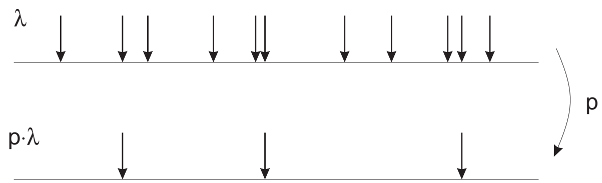
Poisson-prosessilla on useita mielenkiintoisia ominaisuuksia:

1. Ehdollistaminen lukumäärään. Sillä ehdolla, että aikavälinä $(0, t)$ Poisson-prosessista on tullut tietty määrä saapumisia, $N(t) = n$, nämä n saapumista ovat toisistaan riippumatta tasan jakautuneita kyseisenä aikavälinä.
   - Poisson-prosessi aikavälillä $(0, t)$ voidaan generoida seuraavasti:
     - arvotaan pisteiden kokonaismäärä n Poisson(λt)-jakaumasta
     - arvotaan kullekin pisteelle muista riippumatta paikka satunnaisesti välillä $(0, t)$

2. Superpositio. Kahden Poisson-prosessin, joiden intensiteetit ovat λ_1 ja λ_2, superpositio on Poisson-prosessi, jonka intensiteetti on $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

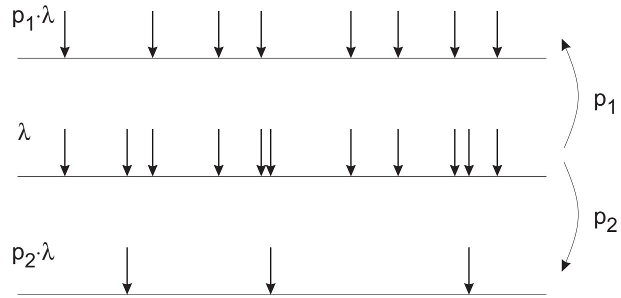


3. Satunnaispoiminta. Jos Poisson-prosessista, jonka intensiteetti on λ, suoritetaan satunnaispoiminta siten, että jokainen saapuminen toisistaan riippumatta valitaan satunnaisesti todennäköisyydellä p, syntyy Poisson-prosessi intensiteetillä $p\lambda$.



Poisson-prosessin ominaisuuksia (jatkuu)

4. Satunnaishajoitus. Jos Poisson-prosessille, jonka intensiteetti on λ, suoritetaan satunnaishajoitus kahteen osaprosessiin todennäköisyyksillä p_1 ja p_2, missä $p_1 + p_2 = 1$, niin tuloksena saada kaksi riippumatonta Poisson-prosessia, joiden intensiteetit ovat $p_1\lambda$ ja $p_2\lambda$.
(Tulos yleistyy luonnollisella tavalla hajoitukseen useampaan kuin kahteen osaprosessiin.)

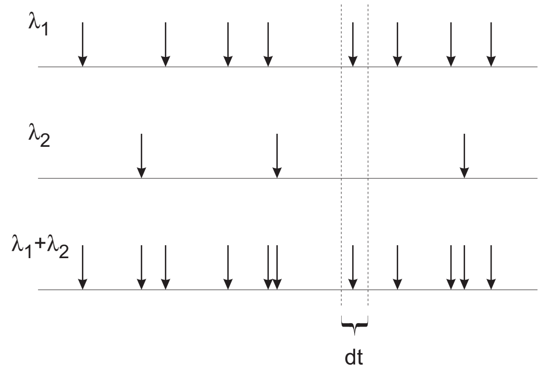


5. PASTA. Poisson-prosessilla on ns. PASTA-ominaisuus (Poisson Arrivals See Time Averages): esimerkiksi jonoon tulevat Poisson-saapumiset näkevät järjestelmän ikäänkuin satunnaisesti poimitulla ajanhetkellä.

Seuraavassa todistetaan osa näistä ominaisuuksista. Ominaisuuden 1 todistus sivuutetaan, mutta siihen liittyvä tarkastelu on harjoitustehtävänä.

Todistuksissa voidaan vapaasti käyttää hyväksi mitä tahansa edellä mainitusta kolmesta Poisson-prosessin määritelmästä.

Todistus (ominaisuus 2, superpositio)

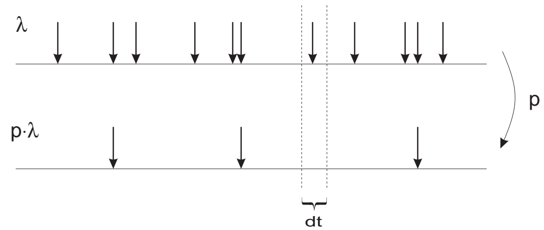


Todennäköisyys, että prosessista 1 tulee saapuminen väliin dt on $\lambda_1 \cdot dt$ riippumatta saapumisista välin ulkopuolella. Vastaavasti saapumistodennäköisyys prosessista 2 on λ_2 dt.

$\Rightarrow$ Superpositioprosessissa saapumistodennäköisyys välissä dt on $(\lambda_1 + \lambda_2)dt$ riippumatta saapumisita välin ulkopuolella.

$\Rightarrow$ Superpositioprosessi on Poisson-prosessi, jonka intensiteetti on $\lambda_1 + \lambda_2$.

Todistus (ominaisuus 3, satunnaispoiminta)



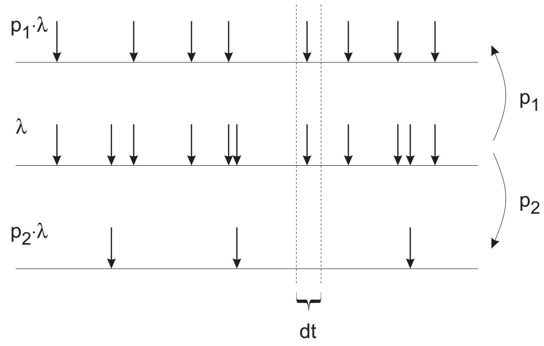
Todennäköisyys, että alkuperäisestä prosessista tulee saapuminen väliin dt on $\lambda \cdot dt$ riippumatta saapumisista välin ulkopuolella.

Satunnaispominnan jälkeen todennäköisyys saapumiselle välissä dt on $p \cdot \lambda \cdot dt$ (riippumatta saapumisista välin ulkopuolella).

$\Rightarrow$ Harvennettu prosessi on Poisson-prosessi, jonka intensiteetti on $p \cdot \lambda$.

Todistus (ominaisuus 4, satunnaishajoitus)

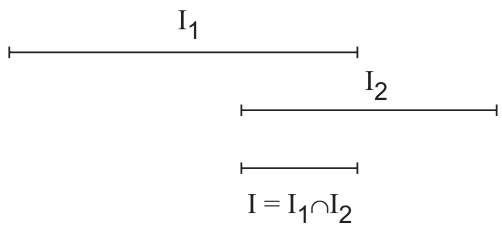
Kumpikin satunnaishajoituksen tuloksena saaduista osaprosesseista edustaa satunnaispoimintaa alkuperäisestä prosessista ja on siten Poisson-prosessi intensiteetillä $p_i\lambda$.



On vielä todistettava prosessien riippumattomuus. Olkoon

$$\begin{cases} N_1(I_1) = & \text{osaprosessin 1 saapumisten lukumäärä intervallissa } I_1 \\ N_2(I_2) = & \text{osaprosessin 2 saapumisten lukumäärä intervallissa } I_2 \end{cases}$$

Merkitään $I = I_1 \cap I_2$



$$\begin{cases} N_1(I_1) = N_1(I) + N_1(I_1 \cap \bar{I}_2) \\ N_2(I_2) = N_2(I) + N_2(I_2 \cap \bar{I}_1) \end{cases}$$

Yhteispisteettömiin väleihin $I_1 \cap \bar{I}_2$ ja $I_2 \cap \bar{I}_1$ tulleet saapumiset ovat varmasti riippumattomia.

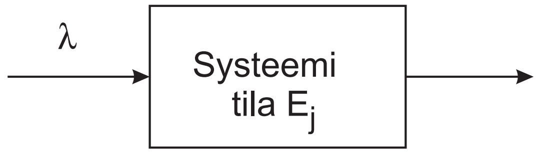
Riippuvuutta voi olla vain $N_1(I)$:n ja $N_2(I)$:n välillä. Mutta nämä edustavat emoprosessin Poisson($\lambda|I|$)-jakautuneiden saapumisten satunnaishajoitusta kahteen ryhmään, joiden todettiin jo Poisson-jakauman yhteydessä olevan toisistaan riippumattomia.

PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages)

Poisson-prosessin ns. PASTA-ominaisuus on eräs jonoteorian keskeisiä työkaluja. Joskus tästä ominaisuudesta käytetään nimitystä ROP (Random Observer Property).

Tarkastellaan mielivaltaista järjestelmää, joka viettää aikaansa eri tiloissa E_j.

Järjestelmään tulee poissoninen saapumisvirta intensiteetillä λ. Tämä saa aikaan järjestelmässä tilamuutoksia.



Tasapainotilassa tilaan E_j voidaan liittää kaksi eri tilatodennäköisyyttä:

1. Ulkopuolisen havaitsijan näkemä tilatodennäköisyys

   π_j = tn. että systeemi on tilassa E_j satunnaisella ajanhetkellä

2. Saapuvan asiakkaan näkemä tilatodennäköisyys

   π_j^* = tn. että systeemi on tilassa E_j juuri ennen (mielivaltaisesti valittua) saapumista

Yleensä on $\boxed{\pi_j \neq \pi_j^*}$

PASTA (jatkoa)

Esim. Ikioma PC (yksi asiakas, yksi palvelija)

$$\begin{cases} E_0 = \text{PC vapaa} \\ E_1 = \text{PC varattu} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_0^* = 1 & \text{(PC on aina vapaa omistajan tarvitessa sitä)} \\ \pi_1^* = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_0 = \text{aikaosuus, jonka PC on vapaa } (< 1) \\ \pi_1 = \text{aikaosuus, jonka PC on käytössä } (> 0) \end{cases}$$

Huom. Tässä tapauksessa saapumisprosessi ei ole Poisson-prosessi: kun saapuminen on tapahtunut (olet aloittanut työn PC:llä), jonkin aikaa siitä eteenpäin on epätodennäköistä, että tapahtuisi uusi saapuminen (eli että edellinen istunto olisi päättynyt ja olisit aloittanut uuden). Saapumiset eri ajanhetkinä eivät ole riippumattomia.

PASTA (jatkoa)

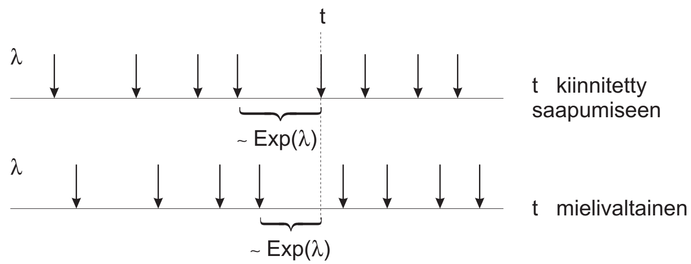
Poisson-saapumisprosessin tapauksessa pätee

$$\boxed{\pi_j = \pi_j^*}$$

Perustelu

Saapumishistoria ennen tarkasteluhetkeä, riippumatta siitä onko tarkasteluhetkeksi valittu satunnainen ajanhetki vai jonkun saapumisen ajankohta, on aina samanlainen:
jono saapumisia, joiden väliajat ovat toisistaan riippumatta eksponentiaalisesti jakautuneita.

Tämä johtuu eksponettijakauman muistittomuudesta. Jäljelläoleva aika seuraavaan saapumiseen on aina samalla tavalla eksponentiaalisesti jakautunut riippumatta siitä paljonko aikaa edellisestä saapumisesta on kulunut (pätee myös käänteisessä ajassa).

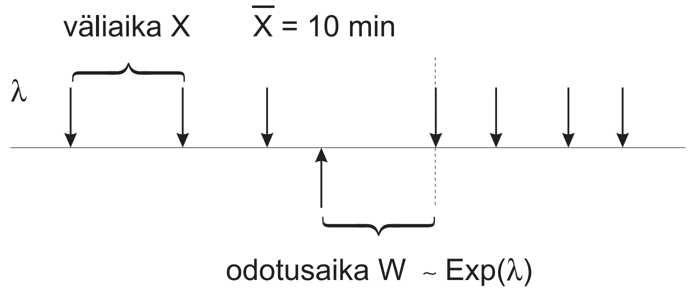


Koska tarkasteluhetkeä edeltävän saapumisprosessin stokastinen karakterisointi on Poisson-prosessin tapauksessa sama riippumatta siitä, miten tarkasteluhetki on valittu, täytyy myös systeemin tilajakauman tarkasteluhetkellä (joka on saapumisprosessin indusoima) olla kummassakin tapauksessa sama.

Liftarin paradoksi

Paradoksin asetelma on seuraava

- Autoja kulkee maantiellä Poisson-prosessin mukaisesti.
- Autojen keskimääräinen väliaika on 10 min.
- Liftari tulee tienvarteen satunnaisena ajanhetkenä.
- Kysytään, mikä on liftarin keskimääräinen odotusaika $\bar{W}$ seuraavan auton saapumiseen.



Poisson-prosessissa väliajat ovat eksponentiaalisesti jakautuneita. Eksponettijakauman muistittomuudesta seuraa, että aika seuraavan auton saapumiseen on samalla tavalla Exp(λ)-jakautunut ja ajan odotusarvo on siten

$$\bar{W} = 10 \text{ min}$$

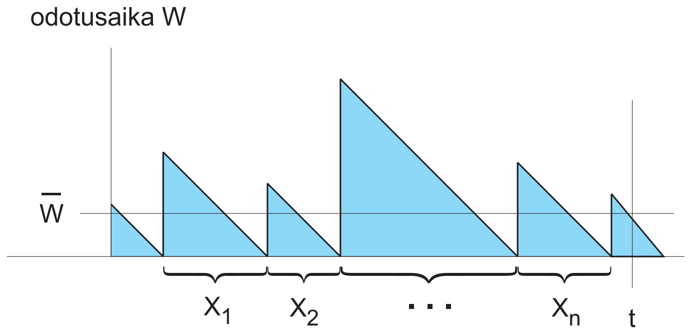
Tämä vaikuttaa paradoksaaliselta. Miksei odotusarvo ole 5 min? Onko jotain vialla?
Vastaus: Ei ole, $\bar{W} = 10$ min on oikea tulos.

Liftarin paradoksin selitys

Paradoksin selitys on siinä, että liftarin todennäköisyys saapua pitkään aikaväliin on suurempi kuin lyhyeen aikaväliin.

Kun aikaväli on valittu, sen sisällä liftarin saapumisajankohta on tasanjakautunut ja odotusajan odotusarvo on puolet välin kestosta. Olennaista on kuitenkin, että satunnainen ajanhetken suorittamassa poiminnassa pitkät väliajat saavat suuremman painon (verrannollinen välin pituuteen).

Tarkastellaan pitkää ajanjaksoa t. Odotusaikaa $W(\tau)$ seuraavan auton saapumiseen liftarin saapumishetken τ funktiona kuvaa kuvion sahalaitakäyrä. Keskimääräinen odotusaika on sahalaitakäyrän keskiarvo.



$$\bar{W} = \frac{1}{t}\int_0^t W(\tau)d\tau \approx \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}X_i^2 \qquad \text{(kolmioiden pinta-alojen summa; } X_i \text{ on väliaika)}$$

Kun $t \to \infty$, niin kolmioiden lukumäärä n on (suhteellisesti) yhä tarkemmin $t/\bar{X}$.

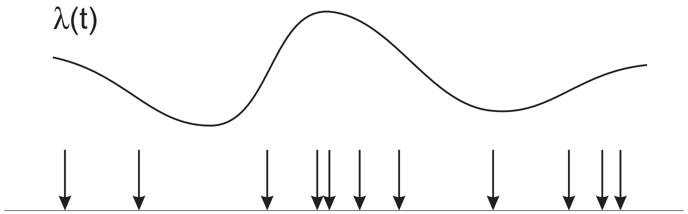
$$\boxed{\bar{W} = \frac{1}{\bar{X}}\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}X_i^2 = \frac{1}{2}\,\frac{\overline{X^2}}{\bar{X}}}$$

Eksponenttijakauman tapauksesssa

$$\overline{X^2} = (\bar{X})^2 + \underbrace{\mathrm{V}[X]}_{(\bar{X})^2} = 2(\bar{X})^2 \qquad \text{eli } \bar{W} = \bar{X}$$

Epähomogeeninen Poisson-prosessi

Aikaisemmin määritetly Poisson-prosessi, jolla on vakiointensiteetti λ, voidaan yksinkertaisella tavalla yleistää ns. epähomogeeniseksi Poisson-prosessiksi sallimalla saapumisintensiteetin vaihdella ajan funktiona $\lambda(t)$. (Huom. $\lambda(t)$ on deterministinen ajan funktio.)



Saapumistodennäköisyys lyhyessä aikavälissä $(t, t + dt)$ on nyt $\lambda(t)dt + \mathcal{O}(dt)$.

- Todennäköisyys useammalle saapumiselle on kertalukua $\mathcal{O}(dt)$
- Saapumisten lukumäärän odotusarvo välissä $(t, t + dt)$ on

$$\mathrm{E}[N(t, t + dt)] = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \mathrm{P}\{n \text{ saapumista välissä } (t, t + dt)\} = \lambda(t)dt + \mathcal{O}(dt)$$

- Saapumisten lukumäärän odotusarvo äärellisessä välissä $(0, t)$ on vastaavasti

$$\mathrm{E}[N(0, t)] = \mathrm{E}[\int_0^t N(u, u + du)] = \int_0^t \mathrm{E}[N(u, u + du)] = \int_0^t \lambda(u)du$$

(Summan odotusarvo on aina odotusarvojen summa, siksi integroinnin ja odotusarvon järjestys voidaan vaihtaa.)

Epähomogeeninen Poisson-prosessi (jatkoa)

Samalla tavalla kuin aikaisemmin tavallisen homogeenisen Poisson-prosessin tapauksessa johdetaan laskuriprosessin $N(t)$ (saapumiset välissä $(0,t)$) generoivalle funktiolle $\mathcal{G}_t(z)$ differentiaaliyhtälö

$$\tfrac{d}{dt}\mathcal{G}_t(z) = (1-z)\lambda(t)\mathcal{G}_t(z) \quad \Rightarrow \quad \tfrac{d}{dt}\log\mathcal{G}_t(z) = (1-z)\lambda(t)$$

josta integroimalla saadaan ratkaisu

$$\boxed{\mathcal{G}_t(z) = e^{(z-1)\int_0^t \lambda(u)du}}$$

Merkitään välin $(0,t)$ saapumisten lukumäärän odotusarvoa $a(t)$:llä

$$a(t) = \mathrm{E}[N(t)] = \int_0^t \lambda(u)du$$

Havaitaan, että $\mathcal{G}_t(z)$ on Poisson-jakautuneen satunnaismuuttujan generoiva funktio, joten

$$\boxed{N(t) \sim \mathrm{Poisson}(a(t))}$$

Epähomogeenisen Poisson-prosessin ominaisuuksia

Analogisesti homogeenisen Poisson-prosessin kanssa, epähomogeenisella Poisson-prosessilla voidaan osoittaa olevan seuraavat ominaisuudet:

1. Ehdollistaminen lukumäärään. Sillä ehdolla, että aikavälinä $(0, t)$ epähomogeenisesta Poisson-prosessista on tullut tietty määrä saapumisia, $N(t) = n$, näiden n:n saapumisen saapumishetket ovat toisistaan riippumatta jakautuneita välillä $(0, t)$ tiheysfunktion $\lambda(t)/\int_0^t \lambda(u)du$ mukaisesti.

2. Superpositio. Kahden epähomogeenisen Poisson-prosessin, intensiteetit $\lambda_1(t)$ ja $\lambda_2(t)$, superpositio on epähomogeeninen Poisson-prosessi, jonka intensiteetti on $\lambda(t) = \lambda_1(t) + \lambda_2(t)$.

3. Satunnaispoiminta. Jos epähomogeenisesta Poisson-prosessista, jonka intensiteetti on $\lambda(t)$, suoritetaan satunnaispoiminta siten, että jokainen saapuminen toisistaan riippumatta valitaan satunnaisesti todennäköisyydellä $p(t)$ (huom. saa olla ajan funktio), syntyy epähomogeeninen Poisson-prosessi, jonka intensiteetti on $p(t)\lambda(t)$.

4. Satunnaishajoitus. Jos epähomogeeninen Poisson-prosessi, jonka intensiteetti on $\lambda(t)$, hajoitetaan satunnaisesti kahteen osaprosessiin todennäköisyyksillä $p_1(t)$ ja $p_2(t)$, missä $p_1(t) + p_2(t) = 1$, niin tuloksena on kaksi riippumatonta epähomogeenista Poisson-prosessia intensiteeteillä $p_1(t)\lambda(t)$ ja $p_2(t)\lambda(t)$.

Epähomogeenisen Poisson-prosessin ominaisuuksia (jatkoa)

4. Satunnaishajoitus (jatkoa)