Estojärjestelmä (loss system, menetysjärjestelmä)

Tarkastellaan perinteistä puhdasta estojärjestelmää, jossa on annettu

$$\begin{cases} n = \text{johtojen (varattavien elementtien) lukumäärä} \\ a = \text{tarjotun liikenteen intensiteetti} \end{cases}$$

Järjestelmässä ei ole lainkaan odotuspaikkoja. Puhelut, jotka saapuvat kaikkien johtojen ollessa varttuina, estyvät ja estyneet puhelut oletetaan menetetyiksi (blocked calls lost).

Kysytään, mikä on todennäköisyys sille, että tarjottu puhelu estyy?

- Aikaesto tarkoittaa sitä osuutta ajasta, jonka järjestelmä viettää estotilassa, jossa kaikki n elementtiä ovat varattuina.
- Kutsuesto tarkoittaa taas sitä osuutta saapuvista kutsuista, jotka estyvät.
- Liikenne-esto puolestaan tarkoittaa estyneen liikenteen liikenneintensiteetin osuutta tarjotusta liikenneintensiteetistä.

Kaikki yllämainitut estosuureet ovat yhtäsuuret, jos

- tuloprosessi on poissoninen
- kutsujen palveluajat ovat riippumattomia ja identtisesti jakautuneita
- kutsun estyminen ei riipu pyydetyn palveluajan pituudesta

Esto $M/M/n/n$-järjestelmässä: Erlangin kaava

Oletetaan, että asiakkaat saapuvat poissonisesti intensiteetillä λ ja että palveluaika noudattaa Exp(μ)-jakaumaa

$$\begin{cases} \lambda = \text{asiakkaiden saapumisintensiteetti} \\ \mu = \text{asiakkaan palvelunopeus (asiakkaan palveluajan kesto on keskimäärin } 1/\mu) \end{cases}$$

Merkitään

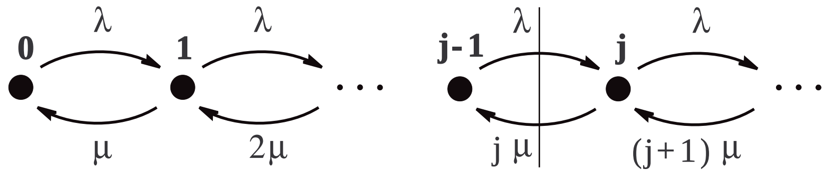
$$\begin{cases} N = \text{varattuina olevien elementtien lukumäärä (asiakkaiden lukumäärä järjestelmässä)} \\ \pi_j = \mathrm{P}\{N = j\} \text{ tilan } j \text{ tasapainotodennäköisyys} \end{cases}$$

Tilamuuttuja N_t muodostaa syntymä-kuolema-tyyppisen Markov-prosessin

- systeemin tila voi muuttua vain askelittain

Erlangin kaava (jatkoa)

Järjestelmän tilakaavio on



Tasapainoyhtälö leikkauksen yli antaa rekursion

$$\lambda \pi_{j-1} = j\mu\pi_j \qquad \text{eli} \qquad \pi_j = \frac{a}{j}\,\pi_{j-1} \qquad\qquad (a = \lambda/\mu = \text{tajottu liikenneintensiteetti})$$

Soveltamalla rekursiota toistuvasti saadaan

$$\pi_j = \frac{a^j}{j!}\,\pi_0$$

Normiehdosta $\pi_0 + \pi_1 \ldots + \pi_n = 1$ voidaan ratkaista $\qquad \pi_0 = 1/(1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \ldots + \frac{a^n}{n!})$

$$\boxed{\pi_j = \frac{\dfrac{a^j}{j!}}{1 + \dfrac{a}{1!} + \dfrac{a^2}{2!} + \ldots + \dfrac{a^n}{n!}}}$$

- tilojen tasapainotodennäköisyydet $M/M/n/n$-järjestelmässä

- katkaistu Poisson-jakauma

- $\rightarrow \dfrac{a^j}{j!}e^{-a}$, kun $n \rightarrow \infty$

Erlangin kaava (jatkoa)

Tilan n todennäköisyys π_n kertoo järjestelmän aikaeston.
Saadaan kuuluisa Erlangin estokaava (ns. Erlangin B-kaava):

$$\boxed{E(n,a) = \frac{\dfrac{a^n}{n!}}{1 + \dfrac{a}{1!} + \dfrac{a^2}{2!} + \ldots + \dfrac{a^n}{n!}}}$$

Kanoninen liikenneteorian kaava: yhdistää järjestelmän koon n tarjotun liikenteen a sekä koetun palvelun laadun (esto).

Esimerkki.

Modeemipoolissa on 4 modeemia ja tarjottu liikenne on 2 erl.
Mikä on todennäköisyys, että yhteysyritys epäonnistuu?
Mikä on esto, jos modeemien määrä nostetaan 6:een?

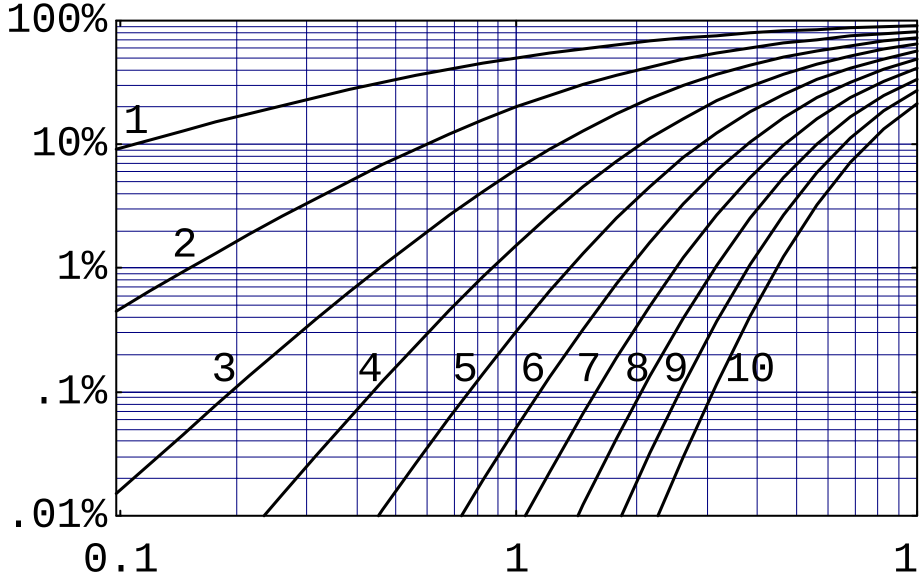
Vastaus: alkuperäinen esto on 9.5 % ja lisämodemien hankinnan jälkeen se on 1.2 %.

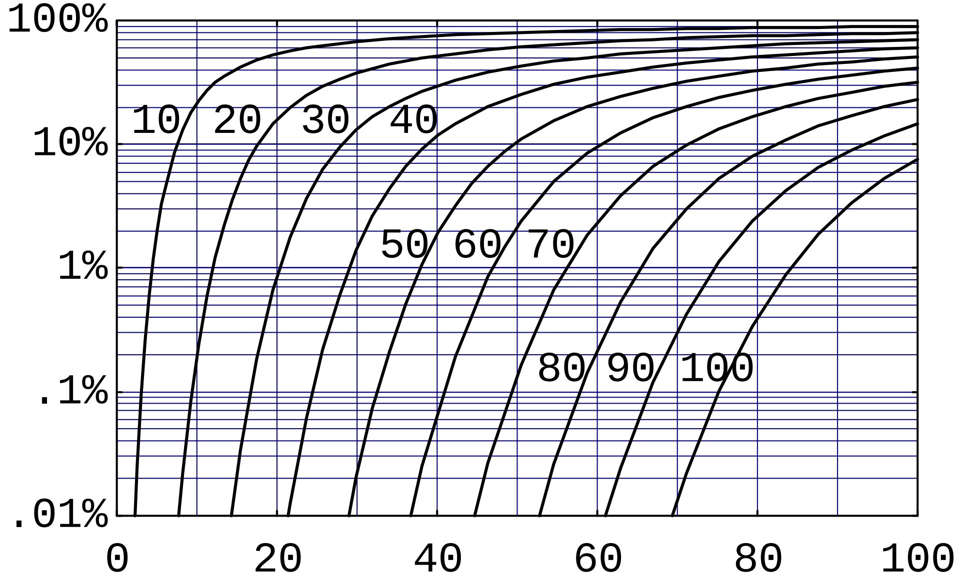
Insensitiivisyys

Erlangin kaava on voimassa yleisesti riipumatta palveluajan jakautuman muodosta.

Esto riippuu ainoastaan palveluajan keskimääräisestä pituudesta $1/\mu$ liikenneintensiteetin $a = \lambda/\mu$ kautta.

Erlangin estofunktio käyrästöinä





- Vaaka-akselilla liikenneintensiteetti a
- Käyräparametrina systeemin koko n
- Pystyakselilla estotodennäköisyys $E(n, a)$

Vaadittu kapasiteetti kuorman funktiona

Seuraavassa taulukossa on annettu tarvittavien johtojen lukumäärä n tarjotun liikenneintensiteetin a funktiona, kun sallittu esto on 1 %. Viimeisessä sarakkeessa on tarvittava suhteellinen ylimitoitus n/a eli johtojen määrän suhde kuormaan.

a (erl)	n	n/a
3	8	2.7
10	18	1.8
30	42	1.4
100	117	1.17
300	324	1.08
1000	1029	1.03

- Suurilla liikenneintensiteeteillä a miehityksen Poisson-vaihtelut ovat suhteellisen pieniä ja vaadittu ylimääräkapasiteetti on pieni
  - Poisson-jakaumassa hajonnan suhde keskiarvoon on $\sqrt{a}/a = 1/\sqrt{a}$.
- Mitoituksen kannalta tällöin (a suuri) onkin tärkeämpää, että mitoituksen pohjana oleva a on määrätty oikein ja sen arvioon sisältyvät epävarmuudet on huomioitu.

Rekursiokaava

Erlangin estofunktio on yksinkertainen lauseke, jonka laskeminen ei tuota vaikeuksia.

Joissakin mitoitusohjelmissa kuitenkin Erlangin funktio esiintyy (mahdollisesti moninkertaisen) iteraation sisimmässä silmukassa. Tällöin on tarpeen kiinnittää huomitota estofunktion nopeaan laskentaan. Usein on edullista käyttää seuraavaa rekursiota:

$$E(n,a) = \frac{\frac{a^n}{n!}}{1+\frac{a}{1!}+\frac{a^2}{2!}+\cdots+\frac{a^n}{n!}}$$

$$\frac{E(n,a)}{E(n-1,a)} = \frac{\frac{a^n}{n!}}{\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}} \frac{1+\frac{a}{1!}+\frac{a^2}{2!}+\cdots+\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}}{1+\frac{a}{1!}+\frac{a^2}{2!}+\cdots+\frac{a^n}{n!}} = \frac{a}{n}(1-\underbrace{\frac{\frac{a^n}{n!}}{1+\frac{a}{1!}+\frac{a^2}{2!}+\cdots+\frac{a^n}{n!}}}_{E(n,a)})$$

$$E(n,a) = \frac{a}{n}E(n-1,a)(1-E(n,a)) \quad \Rightarrow \quad E(n,a)(n+aE(n-1,a)) = aE(n-1,a)$$

$$\boxed{\begin{aligned} E(0,a) &= 1 \\ E(n,a) &= \frac{aE(n-1,a)}{n+aE(n-1,a)} \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} F(0,a) &= 1 \\ F(n,a) &= 1+\frac{n}{a}F(n-1,a) \end{aligned}}$$

Jälkimmäinen muoto on saatu kirjoittamalla rekursio käänteisarvolle $F(n,a) = 1/E(n,a)$. Tätä käytettäessä siis lasketaan ensin $F(n,a)$, josta saadaan $E(n,a) = 1/F(n,a)$.

Tasapainojakauman insensitiivisyys

Edellä johdettiin tulos, jonka mukaan estojärjestelmän tasapainotodenäköisyys noudattaa katkaistua Poisson-jakaumaa:

$$\boxed{\pi_j = \frac{\dfrac{a^j}{j!}}{1 + \dfrac{a}{1!} + \dfrac{a^2}{2!} + \ldots + \dfrac{a^n}{n!}}} \qquad j = 0, 1, \ldots, n$$

$$\begin{cases} a & = \lambda \bar{X} \\ \lambda & = \text{Poisson saapumisintensiteetti} \\ \bar{X} & = \text{keskimääräinen pitoaika } (1/\mu) \end{cases}$$

Tekniikka, jolla kaava johdettiin, nojautui oletukseen siitä, että saapumisprosessi on poissoninen ja että pitoaika noudattaa eksponenttijakaumaa.

On merkittävää, että itse tulos on voimassa yleisemminkin. Pätee ns. insensitiivisyystulos

Tasapainojakaumalle (ja erityisesti estotodennäköisyydelle π_n) johdettu kaava on voimassa mielivaltaiselle pitoajan jakaumalle ja riippuu ko. jakaumasta ainoastaan pitoajan keskiarvon $\bar{X}$ kautta. (Poisson-oletus on sen sijaan välttämätön.)

- Insensitiivisyysominaisuuden todistus yleisesti on epätriviaali tehtävä.
- Seuraavassa esitetään tarkastelut, joiden perusteella insensitiivisyysominaisuuden voimassaolo nähdään tapauksissa $n = 1$ ja $n = \infty$.

Insensitiivisyys tapauksessa $n = 1$ ($M/M/1/1$-järjestelmä)

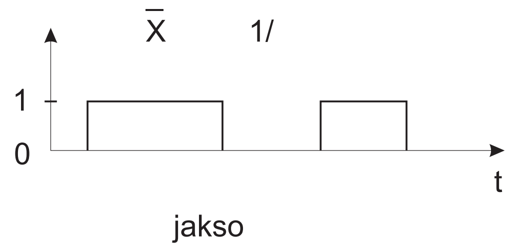
Tapauksessa $n = 1$ katkaistu Poisson-jakauma supistuu muotoon

$$\boxed{\pi_0 = \frac{1}{1+a}, \qquad \pi_1 = \frac{a}{1+a}, \qquad \text{missä } a = \lambda\bar{X}}$$

Insensitiivisyysväite: Tilatodennäköisyydet ovat voimassa pitoajan jakaumasta riippumatta.

Todistus: Järjestelmän tila vaihtelee "palvelin varattu" ja "palvelin vapaa" -tilojen välillä.

Tarkastellaan täyttä sykliä, joka sisältää yhden varattujakson ja yhden vapaajakson.



Kaikki syklit ovat tilastollisesti identtisiä. Varattu-/vapaatilan todennäköisyys on sama kuin varattu-/vapaajakson keskimääräinen osuus tyypillisen jakson kestosta.

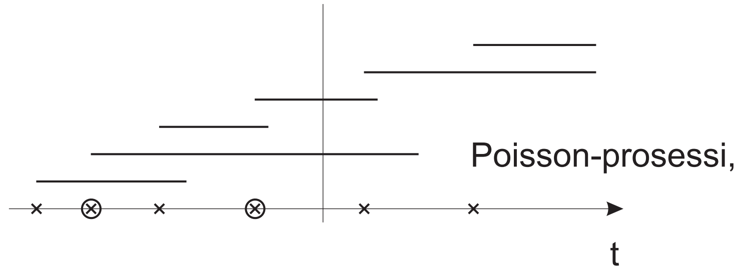
$$\begin{cases} \bar{X} & = \text{varattujakson keston odotusarvo} \\ 1/\lambda & = \text{vapaajakson keston odotusarvo} \\ & \text{(saapumisväliajat Exp}(\lambda)\text{-jakautuneita; muistittomuus!)} \\ \bar{X} + 1/\lambda & = \text{koko jakson keston odotsuarvo} \end{cases}$$

$$\pi_0 = \frac{1/\lambda}{\bar{X} + 1/\lambda} = \frac{1}{1+a}, \quad \pi_1 = \frac{\bar{X}}{\bar{X} + 1/\lambda} = \frac{a}{1+a}$$

Tietoa X:n jakaumasta ei tarvittu missään vaiheessa!

Insensitiivisyys tapauksessa $n = \infty$ ($M/M/\infty/\infty$-järjestelmä)

Järjestelmä on nyt estoton. Tarkastellaan hetkellä 0 käynnissä olevien yhteyksien lukumäärää. Tämä on sama kuin niiden yhteyksien alkamistapahtumien lukumäärä, jotka ovat vielä käynnissä hetkellä 0.



- Yhteyden kesto X arvotaan riippumattomasti kullekin saapumiselle häntäjakauma $G(t) = \mathrm{P}\{X > t\}$.
- Poimitaan ne yhteydet, jotka ulottuvat hetken 0 yli. Hetkellä $t < 0$ saapuvalle yhteydelle valituksi tulemisen todennäköisyys on $G(-t)$.
- Valittujen yhteyksien saapumisprosessi on epähomogeeninen Poisson-prosessi intensiteetillä $\lambda(t) = \lambda \cdot G(-t)$.
- Hetkellä 0 päälläolevien kutsujen lukumäärä on sama kuin saapumisten lukumäärä ko. prosessista välillä $(-\infty, 0)$. Lukumäärä on $\sim$ Poisson(a), missä $a = \int_{-\infty}^{0} \lambda(t) dt$.

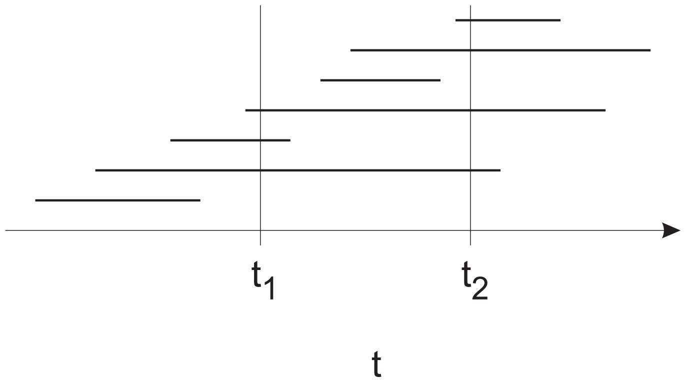
$$\begin{aligned} a &= \int_{-\infty}^{0} \lambda G(-t) dt = \lambda \int_{0}^{\infty} G(t) dt = \lambda \Big(\underbrace{\Big/_{0}^{\infty} t\, G(t)}_{0} - \int_{0}^{\infty} \underbrace{G'(t)}_{-f(t)}\, t\, dt \Big) \\ &= \lambda \int_{0}^{\infty} t f(t)\, dt = \lambda \bar{X} \end{aligned}$$

Lukumäärän jakauma $\boxed{\text{Poisson}(\lambda \bar{X})}$ riippuu pitoajasta vain keskiarvon $\bar{X}$ kautta.

Miehitystilojen kovarianssi eri ajanhetkillä $M/M/\infty/\infty$-järjestelmässä

Tutkitaan järjestelmän miehityksen N kovarianssia kahden eri ajanhetken t_1 ja t_2 välillä.

- Järjestelmään saapuu yhteyksiä (asiakkaita) poissonisesti intensiteetillä λ.
- Yhteyden pitoajan X häntäjakauma on $G(x) = \mathrm{P}\{X > x\}$ (yleinen jakauma).



Merkitään

$$\begin{cases} N_1 = \text{yhteyksien lukumäärä hetkellä } t_1 \\ N_2 = \text{yhteyksien lukumäärä hetkellä } t_2 \end{cases}$$

Halutaan siis laskea $\mathrm{Cov}[N_1, N_2]$.

- Jos t_1 ja t_2 ovat lähellä toisiaan, voidaan olettaa, että $N_1 \approx N_2$ ja $\mathrm{Cov}[N_1, N_2] \approx \mathrm{V}[N] = \lambda \bar{X} = a$.
- Jos taas t_1 ja t_2 ovat kaukana toisistaan, N_1 ja N_2 ovat likimain riippumattomia ja $\mathrm{Cov}[N_1, N_2] \approx 0$.

Miehitystilojen kovarianssi (jatkoa)

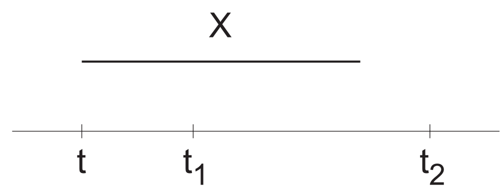
Jaetaan sekä N_1 että N_2 alla esitettävällä tavalla riippumattomiin komponentteihin

$$\begin{cases} N_1 = K_1 + K_{1,2} \\ N_2 = K_2 + K_{1,2} \end{cases}$$

jolloin kovarianssi tulee kokonaan yhteisen komponentin $K_{1,2}$ kautta,

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}[N_1, N_2] &= \mathrm{Cov}[K_1 + K_{1,2}, K_2 + K_{1,2}] \\ &= \mathrm{Cov}[K_1, K_2] + \mathrm{Cov}[K_1, K_{1,2}] + \mathrm{Cov}[K_{1,2}, K_2] + \mathrm{Cov}[K_{1,2}, K_{1,2}] \\ &= \mathrm{Cov}[K_{1,2}, K_{1,2}] = \mathrm{V}[K_{1,2}] \end{aligned}$$

<u>Komponentti K_1</u>: niiden yhteyksien lukumäärä, jotka ovat päällä hetkellä t_1 mutteivät enää hetkellä t_2

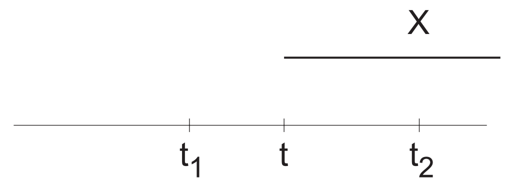


- saapuminen hetkellä $t < t_1$
- ehto kestolle X: $t_1 - t < X < t_2 - t$
- satunnaispoiminta tulovirrasta λ välillä $-\infty < t < t_1$ todennäköisyydellä $G(t_1 - t) - G(t_2 - t)$

Miehitystilojen kovarianssi (jatkoa)

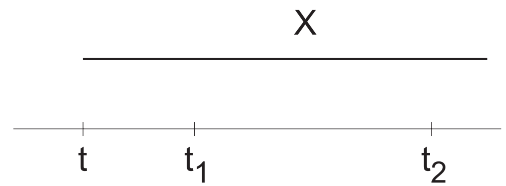
Komponentti K_2: niiden yhteyksien lukumäärä, jotka ovat päällä hetkellä t_2 mutta jotka eivät olleet vielä päällä hetkellä t_1

- saapuminen hetkellä $t_1 < t < t_2$
- ehto kestolle X: $X > t_2 - t$
- satunnaispoiminta tulovirrasta λ välillä $t_1 < t < t_2$ todennäköisyydellä $G(t_2 - t)$



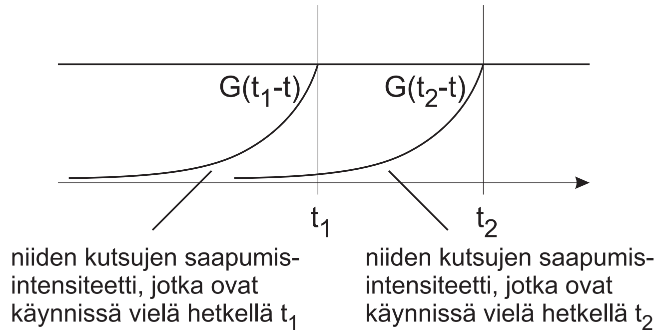
Komponentti $K_{1,2}$: niiden yhteyksien lukumäärä, jotka ovat päällä sekä hetkellä t_1 että t_2

- saapuminen hetkellä $t < t_1$
- ehto kestolle X: $X > t_2 - t$
- satunnaispoiminta tulovirrasta λ välillä $t < t_1$ todennäköisyydellä $G(t_2 - t)$

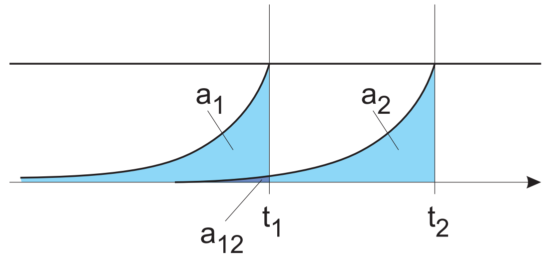


Miehitystilojen kovarianssi (jatkoa)

Suureet K_1, K_2 ja $K_{1,2}$ edustavat saapumisten kokonaismääriä epähomogeeinisistä Poisson-prosesseista, jotka on saatu satunnaispoiminnalla tai -hajoituksella asianomaisissa aikaväleissä.



Poisson-prosessin satunnaispoimintaa / satunnaishajoitusta koskevien tulosten nojalla K_1, K_2 ja $K_{1,2}$ noudattavat kaikki Poisson-jakaumaa ja ovat toisistaan riippumattomia,



$$\begin{cases} K_1 \sim \text{Poisson}(a_1), & a_1 = \lambda \int_{-\infty}^{t_1} (G(t_1 - t) - G(t_2 - t))dt \\ K_2 \sim \text{Poisson}(a_2), & a_2 = \lambda \int_{t_1}^{t_2} G(t_2 - t)dt \\ K_{1,2} \sim \text{Poisson}(a_{1,2}), & a_{1,2} = \lambda \int_{-\infty}^{t_1} G(t_2 - t)dt \end{cases}$$

Koska $\mathrm{V}[K_{1,2}] = a_{1,2}$, saadaan tulos (muuttujan vaihto $x = t_2 - t$)

$$\boxed{\mathrm{Cov}[N_1, N_2] = \lambda \int_{t_2 - t_1}^{\infty} G(t)dt}$$

Kun $t_1 = t_2$, saadaan $\mathrm{V}[N_1] = \mathrm{Cov}[N_1, N_1] = \lambda \overbrace{\int_0^\infty G(t)dt}^{\overbrace{\big/_0^\infty t\,G(t)}^{0} - \int_0^\infty t\,\overbrace{G'(t)}^{-f(t)}\,dt} = \lambda \bar{X} = a$, kuten pitääkin.