AJAN KÄÄNTÖ JA KÄÄNTYVÄT PROSESSIT

Käännetty prosessi

Tarkastellaan pelkistymätöntä stationaarista stokastista prosessia X_t.

Tähän prosessiin voidaan liittää ns. käännetty prosessi X_t^*, jossa prosessin X_t kulkua tarkastellaan käännetyssä ajassa (“ filmi pyöritetään trakaperin”).

$$\boxed{X_t^* = X_{\tau-t}}$$

Ajan kääntö hetken τ suhteen.
Parametri τ on epäolennainen; se määrittelee vain mihin kohtaan käännetyssä prosessissa sijoitamme ajan origon.

Miksi halutaan tutkia käännettyä prosessia

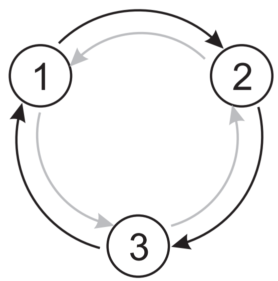
- Osoittautuu, että sen avulla saadaan lisänäkemystä prosessin ominaisuuksista.
- Monasti käänteisen prosessin tarkastelun avulla voidaan hyvin yksinkertaisesti ja elegantisti johtaa tuloksia, joiden suoraviivainen johtaminen vaatisi mutkikkaita laskuja.
- Esimerkiksi monimutkaisen järjestelmän tasapainoyhtälöt voidaan ratkaista “arvaamalla” käännetty prosessi.
- Jonojärjestelmän lähtöprosessin (ulostulo) ominaisuudet voidaan usein helpoiten selvittää tutkimalla käännettyä prosessia.

Käännetty prosessi (jatkoa)

Yleensä ajassa käännetty prosessi X_t^* on eri prosessi kuin alkuperäinen prosessi.

Esimerkki: Syklinen (jaksollinen) prosessi.

Prosessissa X_t tilat esiintyvät sekvenssissä $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$. Käännetyssä prosessissa sekvenssi on $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. Selväsitkään ei voi olla kysymyksessä sama prosessi.



Käännetyn prosessin tasapainojakauma

Oletetaan, että prosessilla X_t on tasapainojakauma $\pi_i = \mathrm{P}\{X_t = i\}$.

Tällöin myös käännetyllä prosessilla X_t^* on tasapainojakauma $\pi_i^* = \mathrm{P}\{X_t^* = i\}$ ja tämä jakauma on sama kuin alkuperäisellä prosessilla

$$\boxed{\pi_i^* = \pi_i \quad \forall i}$$

Perustelu. π_i ja π_i^* edustavat niitä osuuksia ajasta, jonka prosessit X_t ja X_t^* viettävät tilassa i. Aikaosuus on riippumaton siitä, kummassa suunnassa prosessia tarkastellaan.

Kääntyvä prosessi

Jos prosessin X_t käännetty prosessi X_t^* on tilastollisesti identtinen alkuperäisen prosessin kanssa, sanotaan että prosessi X_t on ajassa kääntyvä.

Täsmällisesti määriteltynä kääntyvyys tarkoittaa sitä, että

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}) \sim (X_{\tau - t_1}, X_{\tau - t_2}, \ldots, X_{\tau - t_n}) \qquad \text{kaikilla arvoilla } t_1, t_2, \ldots, t_n \text{ ja } \tau \text{ ja } n$$

ts. kyseisillä arvojoukoilla on samat yhteisjakaumat.

- Intuitiivisesti prosessin X_t kääntyvyys tarkoittaa sitä, että ulkopuolinen tarkkailija ei pysty kertomaan "ajetaanko filmiä oikeinpäin vai takaperin".

Markovin ketju käännetyssä ajassa

Lause. Markovin ketjun $\ldots, X_{n-1}, X_n, X_{n+1}, \ldots$ käännetty ketju $\ldots, X_{n+1}, X_n, X_{n-1}, \ldots$ muodostaa Markovin ketjun.

Todistus. Tarkastellaan arvon $X_m = j$ todennäköisyyttä ehdollistettuna sitä seuraaviin arvoihin $X_{m+1} = i, X_{m+2} = i_2, \ldots, X_{m+k}$, jotka käännetyssä ajassa ovat edeltäviä arvoja:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}\{X_m = j \,|\, X_{m+1} = i, X_{m+2} = i_2, \ldots, X_{m+k} = i_k\} \\
&= \frac{\mathrm{P}\{X_m = j, X_{m+1} = i, X_{m+2} = i_2, \ldots, X_{m+k} = i_k\}}{\mathrm{P}\{X_{m+1} = i, X_{m+2} = i_2, \ldots, X_{m+k} = i_k\}} \\
&= \frac{\mathrm{P}\{X_m = j, X_{m+1} = i\}\mathrm{P}\{X_{m+2} = i_2, \ldots, X_{m+k} = i_k \,|\, \overbrace{X_m = j}^{\text{ei riipu tästä, Markov!}}, X_{m+1} = i\}}{\mathrm{P}\{X_{m+1} = i\}\mathrm{P}\{X_{m+2} = i_2, \ldots, X_{m+k} = i_k \,|\, X_{m+1} = i\}} \\
&= \frac{\mathrm{P}\{X_m = j, X_{m+1} = i\}}{\mathrm{P}\{X_{m+1} = i\}} \\
&= \frac{\mathrm{P}\{X_m = j\}\mathrm{P}\{X_{m+1} = i \,|\, X_m = j\}}{\mathrm{P}\{X_{m+1} = i\}} = \frac{\pi_j p_{j,i}}{\pi_i}
\end{aligned}
$$

ei riipu lainkaan muuttujien $X_{m+2} \ldots X_{m+k}$ arvoista $i_2, \ldots, i_k$

Käänteisen prosessin siirtymätodennäköisyydet

$$
\boxed{p^*_{i,j} = \mathrm{P}\{X_m = j \,|\, X_{m+1} = i\} = \frac{\pi_j p_{j,i}}{\pi_i}}
$$

Markovin prosessi käännetyssä ajassa (jatkoa)

Lause. Olkoon X_t (jatkuva-aikainen) Markov-prosessi, jonka tilasiirtymänopeudet ovat $q_{i,j}$ ja tasapainotodennäköisyydet π_i. Tällöin käännetty prosessi X_t^* on Markov-prosessi ja sen tilasiirtymänopeudet ovat

$$\boxed{q_{i,j}^* = \frac{\pi_j q_{j,i}}{\pi_i}}$$

Todistus. Samankaltainen kuin edellä.

Huom. Nämä lauseet sanovat ainoastaan, että käännetty prosessi on markovinen, ei sitä että se olisi sama prosessi kuin alkuperäinen. Kääntyvyys on erillinen lisäominaisuus.

Tasapainotodennäköisyyksien ratkaisu käännetyn prosessin avulla

Lause. Olkoon X_t Markov-prosessi, jonka tilasiirtymänopeudet ovat $q_{i,j}$. Jos löytyy luvut $q^*_{i,j}$ ja luvut π_i siten, että

$$\sum_{j\neq i} q_{i,j} = \sum_{j\neq i} q^*_{i,j} \quad \forall i \qquad \text{ja} \qquad \pi_i q^*_{i,j} = \pi_j q_{j,i} \quad \forall i,j \qquad \text{ja} \qquad \sum_i \pi_i = 1$$

niin π_i:t ovat prosessien X_t ja X^*_t yhteiset tasapainotodennäköisyydet ja $q^*_{i,j}$:t prosessin X^*_t tilasiirtymänopeudet.

Todistus:

$$\sum_{j\neq i} \pi_j q_{j,i} = \sum_{j\neq i} \pi_i q^*_{i,j} = \pi_i \sum_{j\neq i} q^*_{i,j} = \pi_i \sum_{j\neq i} q_{i,j} = \sum_{j\neq i} \pi_i q_{i,j} \qquad \forall i$$

Siten π_i:t toteuttavat X_t-prosessin globaalit tasapainoyhtälöt. Lisäksi on $q^*_{i,j} = \pi_i q_{i,j}/\pi_i$ eli X^*_t:n siirtymänopeus.

- Lausetta voidaan (hiukan yllättäen) käyttää hyväksi sen todistamiseksi, että arvattu jakauma π_i todella on tasapainojakauma arvaamalla lisäksi käänteisen prosessin siirtymänopeudet $q^*_{i,j}$.
- On todella tapauksia (eräitä varsin mutkikkaita järjestelmiä), joissa π_i:t voidaan arvata ja käänteinen prosessi on melko ilmeinen ja joissa globaalien tasapainoehtojen toteutumisen suora tarkastus olisi työlästä.

Kääntyvä Markov-prosessi

Käännetty Markov-prosessi X_t^* käyttäytyy alkuperäisen prosessin tavoin, jos sillä on samat tilasiirtymänopeudet. Kääntyvyyden ehto on siten

$$\boxed{q_{i,j}^* = q_{i,j}} \qquad \forall i, j$$

Aikaisemmin $q_{i,j}^*$:lle annetun lausekkeen perusteella ehto on ekvivalentti seuraavan ominaisuuden kanssa

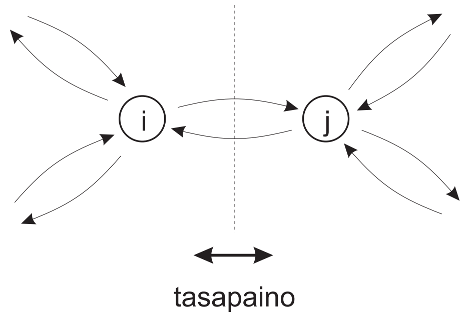
$$\boxed{\pi_i q_{i,j} = \pi_j q_{j,i}} \qquad \forall i, j$$

Detaljibalanssi
kääntyvyyden ehto

- Detaljibalanssi sanoo, että todennäköisyysvirrat minkä tahansa kahden tilan välillä ovat tasapainossa.
- Detaljibalanssista seuraa välittömästi globaalibalanssi eli että (kokonais)todennäköisyysvirta tilasta ulos, $\sum_j \pi_i q_{i,j}$, on yhtäsuuri kuin virta sisään, $\sum_j \pi_j q_{j,i}$.
- Tästä seuraa edelleen, että jos löytyy luvut π_i siten, että detaljibalanssiehdot ovat voimassa, niin π_i:t ovat systeemin tasapainotodennäköisyydet (normitettuna $\sum_i \pi_i = 1$).
- Toisinpäin ei ole voimassa, että globaalitasapainosta seuraisi detaljibalanssi; kaikki Markov-prosessit eivät ole kääntyviä.

Detaljibalanssi

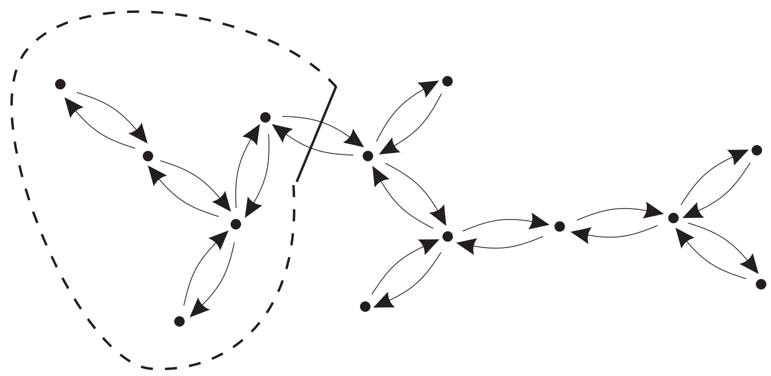
$$\begin{cases} \pi_i q_{i,j} & = \text{ siirtymien } i \rightarrow j \text{ frekvenssi} \\ \pi_j q_{j,i} & = \text{ siirtymien } j \rightarrow i \text{ frekvenssi} \end{cases}$$



Detaljibalanssiehto sanoo, että prosessissa X_t tilojen i ja j välisiä siirtymiä tapahtuu samalla frekvenssillä kumpaankin suuntaan.

- Kääntyvässä prosessissa täytyy näin tietenkin ollakin, sillä käännettäessa ajan suunta siirtymästä $i \rightarrow j$ tulee siirtymä $j \rightarrow i$ ja päinvastoin. Jotta käännetty prosessi näyttäisi samalta kuin alkuperäinenkin, täytyy siirtymäfrekvenssien molempiin suuntiin olla samat.

Puut ovat kääntyviä



Lause: Jos Markov-prosessin tilakaavio on puu, niin prosessi on ajassa kääntyvä.

Todistus. Suorittamalla leikkaus minkä tahansa kahden tilan väliltä puu jakaantuu kahteen osaan. Näihin osiin sovelletusta tilaryhmien välisestä (globaalista) tasapainoehtosta seuraa detaljibalanssi leikkauksessa.

Seuraus: Kaikki SK-tyyppiset Markov-prosessit ovat ajassa kääntyviä.

Esim. $M/M/1$, $M/M/n$, $M/M/\infty$, $M/M/m/m$, ...

Kolmogorovin kriteeri

Detaljibalanssin muodossa ilmoitettu kääntyvyysehto on sovellettavissa vain, kun tunnetaan sekä siirtymänopeudet $q_{i,j}$ ja tasapainotodennäköisyydet π_i.

Jälkimmäiset voidaan aina ratkaista, kun $q_{i,j}$:t on annettu, ja niin ollen detaljibalanssin voimassaolon tarkistamiseen riittää tuntea siirtymänopeudet $q_{i,j}$.

Voidaan kysyä, onko mahdollista päätellä kääntyvyys (detaljibalanssi) suoremmin siirtymänopeuksista $q_{i,j}$ ratkaisematta ensin tasapainotodennäköisyyksiä. Vastaus on myönteinen ja tarvittavan päättelyn kertoo seuraava:

Kolmogorovin kriteeri

Olkoon $i_1, i_2, \ldots, i_m, i_1$ mikä tahansa suljettu sykli tilakaaviossa. Kolmogorovin kriteeri on täytetty, jos jokaiselle tällaiselle syklille pätee

$$q_{i_1,i_2} \cdot q_{i_2,i_3} \cdots q_{i_m,i_1} = q_{i_1,i_m} \cdot q_{i_m,i_{m-1}} \cdots q_{i_2,i_1}$$

ts. siirtymänopeuksien tulot syklin yli molempiin suuntiin laskettuina ovat samat.

Voidaan todistaa, että Kolmogorovin kriteeri on ekvivalentti detaljibalanssiehtojen kanssa ja niin ollen se antaa riittävän ja välttämättömän ehdon prosessin kääntyvyydelle.

Seuraus: Koska puumaisessa tilakaaviossa ei ole yhtään sykliä, Kolmogorovin kriteeri on aina täytetty ja seuraa uudelleen, että vastava Markovin prosessi on ajassa kääntyvä.

Burken teoreema

Burken teoreemana tunnettu lause sanoo:

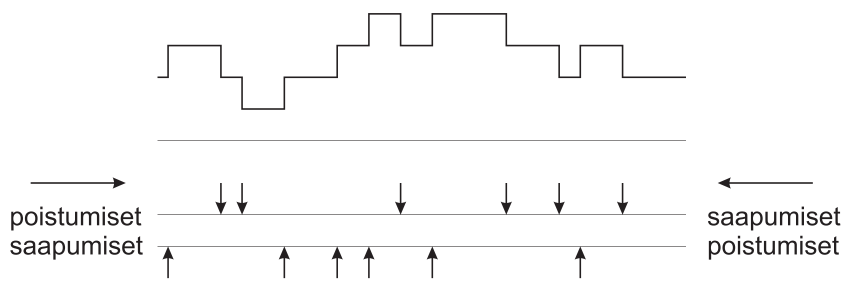
$M/M/1$-systeemissä, jossa poissonisen saapumisprosessin intensiteetti on λ,

a) asiakkaiden poistumishetket muodostavat Poisson-prosessin intensiteetillä λ,

b) kaikilla arvoilla t sisällä olevien asiakkaiden lukumäärä N_t on riippumaton ulostuloprosessista ennen hetkeä t.

Todistus.

a) $M/M/1$-jono on ajassa kääntyvä. Käännetty systeemi käyttäytyy täsmälleen kuten $M/M/1$-jono. Alkuperäisen jonon lähtöprosessi on sama kuin käännetyn systeemin tuloprosessi, joka ollen identtinen alkuperäisen systeemin tuloprosessin kanssa on Poisson-prosessi intensiteetillä λ.



b) Alkuperäisen prosessin lähtöhetket ennen hetkeä t ovat käännetyn prosessin tulohetkiä ajan t jälkeen. Koska kyseiset tulohetket muodostavat Poisson-prosessin, on sen kehitys hetken t jälkeen riippumaton kaikesta menneestä, mm. N_t:n nykyisestä arvosta.

Burken teoreema (jatkoa)

Seuraus 1

Tarkkailemalla $M/M/1$-jonon lähtöhetkiä ei voida päätellä mitään siitä, montako asiakasta systeemissä tällä hetkellä on.

- Jos ulostulossa on havaittu ryöppy, niin jonossa todennäköisesti on ollut tavallista enemmän asiakkaita, mutta siitä, montako asiakasta siellä nyt vielä on, ei saada mitään tietoa.
- Ulostuloprosessia tarkkailemalla ei myöskään saada selville palveluaikaa $1/\mu$.

Seuraus 2

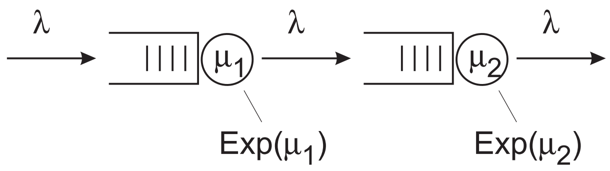
Avoimessa jonoverkossa, joka lisäksi on asyklinen (ei takaisinkytkentäsilmukoita) kaikki jonot ovat riippumattomia $M/M/1$-jonoja.

- Jonojen tulovirrat ovat todellisia Poisson-virtoja.
- Syöttävien jonojen nykytilat ovat riippumattomia aikaisemmista lähtöprosesseistaan, joista syötetyn jonon nykytila yksinomaan riippuu.

Huomautus

Burken teoreema pätee myös $M/M/m$- ja $M/M/\infty$-systeemeille.

Esimerkki: Tandem-jono



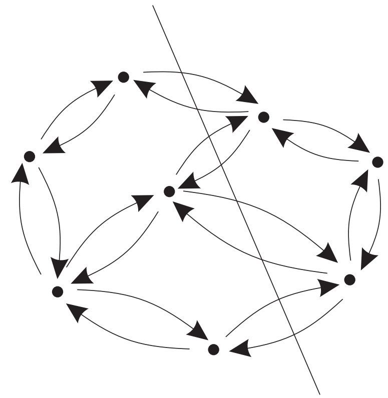
- Riippumattomat eksponentiaaliset palveluajat.
- Ensimmäinen jono on tavallinen $M/M/1$-jono.
- Burken teoreeman mukaan sen ulostuloprosessi on Poisson-prosessi.
- Siten myös jono 2 on $M/M/1$-jono.
- Jonon 2 tila N_2 hetkellä t riippuu vain saapumisista ennen hetkeä t.
- Burken teoreeman mukaan ko. saapumisprosessi (= jonon 1 lähtöprosessi) ennen hetkeä t on riippumaton jonon 1 tilasta hetkellä t.

$\Rightarrow$ N_1 ja N_2 ovat riippumattomia

$$\begin{cases} \mathrm{P}\{N_1 = i\} = (1-\rho_1)\rho_1^i, & \rho_1 = \lambda/\mu_1 \\ \mathrm{P}\{N_2 = j\} = (1-\rho_2)\rho_2^j, & \rho_2 = \lambda/\mu_2 \end{cases}$$

$$\boxed{\mathrm{P}\{N_1 = i, N_2 = j\} = (1-\rho_1)(1-\rho_2)\rho_1^i\rho_2^j}$$

Kääntyvän prosessin katkaisu



Olkoon X_t kääntyvä Markov-prosessi, jonka tila-avaruus on $\mathcal{S}$ ja jonka tasapainotodennäköisyydet ovat π_i. Kääntyvyys tarkoittaa sitä, että detaljibalanssiehdot ovat voimassa.

Olkoon $\mathcal{S}'$ tila-avaruuden osajoukko. Tarkastellaan katkaistua prosessia X'_t, jolla

$$q'_{i,j} = \begin{cases} q_{i,j}, & i,j \in \mathcal{S}' \\ 0, & \text{muuten} \end{cases}$$

Oletetaan lisäksi, että X'_t on pelkistymätön. Tällöin prosessi X'_t on kääntyvä ja sen tasapainojakauma on

$$\boxed{\pi'_i = \frac{\pi_i}{\sum\limits_{j \in \mathcal{S}'} \pi_j}} \qquad \text{ts. } \mathrm{P}\{X' = i\} = \mathrm{P}\{X = i \,|\, X \in \mathcal{S}'\}$$

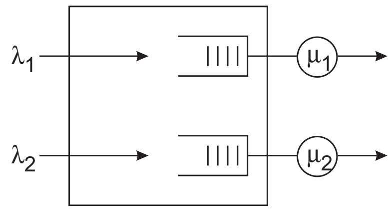
Todistus: Sijoitetaan π_i yritteenä prosessin X'_t globaaleihin tasapainoyhtälöihin. Nähdään heti, että ne toteutuvat kaikille tiloille $i \in \mathcal{S}'$, koska poistuneiden transitioiden nettovirta kuhunkin tilaan on nolla. Todennäköisyysjakauma saadaan (uudelleen)normittamalla jakauma kaikkien tilojen $j \in \mathcal{S}'$ yli.

Huomautus. Katkaisuperiaate on käytännön sovelluksissa tärkeä.

Kääntyvän prosessin katkaisu (jatkoa)

Esim. 1. Aikaisemmin on useasti todettu, että SK-prosessin (kääntyvä!) tila-avaruuden tekeminen äärelliseksi aiheuttaa ainoastaan jakauman katkaisun ja uudelleennormituksen:

$$M/M/1-\text{jono},\quad \underbrace{M/M/m/m}_{\substack{\text{Erlang, katkaistu}\\ \text{Poisson-jakauma}}}\ ,\quad \underbrace{M/M/m/m/n}_{\substack{\text{Engset, katkaistu}\\ \text{binomijakauma}}}$$

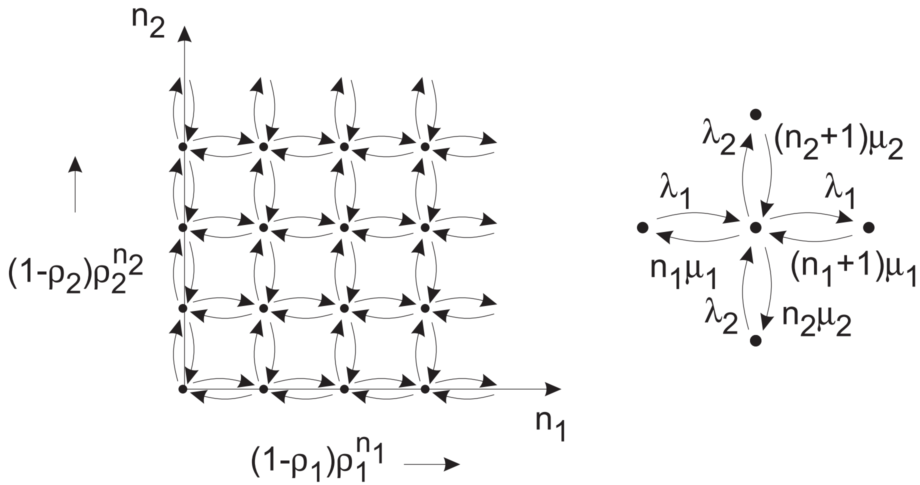


Esim. 2. Kaksi $M/M/1$-jonoa, joilla yhteinen puskuritila

Oletetaan ensin, että muistitila on ääretön. Tällöin jonot ovat täysin riippumattomia.

$$\begin{cases} \mathrm{P}\{N_1 = i\} &= (1-\rho_1)\rho_1^i \\ \mathrm{P}\{N_2 = j\} &= (1-\rho_2)\rho_2^j \end{cases}$$

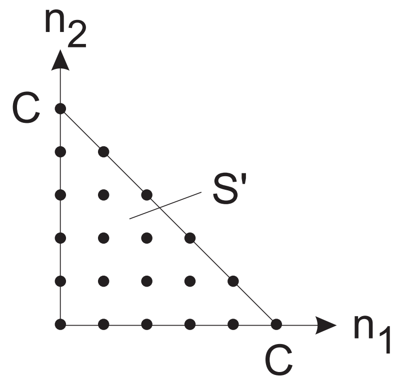
$$\mathrm{P}\{N_1 = i, N_2 = j\} = (1-\rho_1)\rho_1^i(1-\rho_2)\rho_2^j$$



Prosessit N_1 ja N_2 erikseen ovat kääntyviä. On helppo osoittaa, että myös yhteisprosessi (N_1, N_2) on kääntyvä (harjoitustehtävä) eli että ylläoleva yhteisjakauma toteuttaa detaljibalanssiehdot.

Kääntyvän prosessin katkaisu (jatkoa)

Esim. 2. jatkuu...



Äärettömän kapasiteetin systeemissä tilatodennäköisyydet ovat tulomuotoiset (jonojen 1 ja 2 reunajakaumien tulo)

Kun muistitilalla on äärellinen kapasiteetti C, tapahtuu kuvan mukainen tila-avaruuden katkaisu.

Katkaistussa tila-avaruudessa $\mathcal{S}'$ tilatodennäköisyydet ovat samaa muotoa kuin ennenkin.

$$\mathrm{P}\{N_1 = i, N_2 = j\} = \begin{cases} a \cdot \rho_1^i \cdot \rho_2^j, & i + j \le C \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

missä a on normitusvakio

$$a = \frac{1}{\displaystyle\sum_{\substack{i \\ i+j \le C}} \sum_{j} \rho_1^i \cdot \rho_2^j}$$

Huom. Vaikka ratkaisu on tulomuotoinen alueessa $\mathcal{S}'$, se ei ole sitä kaikilla arvoilla $i, j = 0, 1, 2, \ldots$. Jonot eivät ole riippumattomia vaan riippuvat rajoitusehdon kautta.

käännetyn prosessin käyttö jono-ongelmien ratkaisussa

Esim. Tehty työ $M/M/1$-jonossa

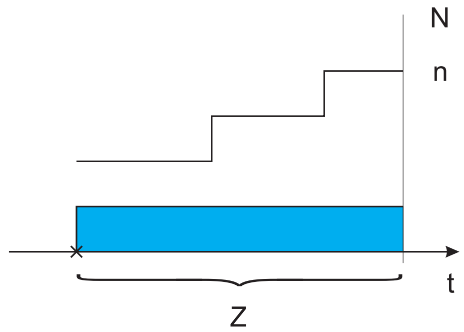
$M/M/1$-jonossa palveltavana olevan asiakkaan tekemätön työ on eksponenttijakauman muistittomuudesta johtuen Exp(μ)-jakautunut ja riippumaton jononpituudesta.

Asiakkaan jo saama palvelu eli tehty työ Z sen sijaan korreloi jononpituuden kanssa: jos palvelu on kestänyt kauan, on todennäköistä, että jonoa on kertynyt paljon.

Ajankääntötarkastelulla voidaan kätevästi johtaa Z:n jakauma ehdolla, että jononpituus on $N = n$.

Viereinen kuva esittää tyypillistä jononpituuden kehittymistä

- Siitä hetkestä alkaen, kun nyt (hetkellä 0) palveltavana oleva asiakas pääsi palveluun, N_t on kasvava (eivähenevä) ajan funktio; koska palvelu jatkuu, systeemistä ei tapahdu poistumisia.



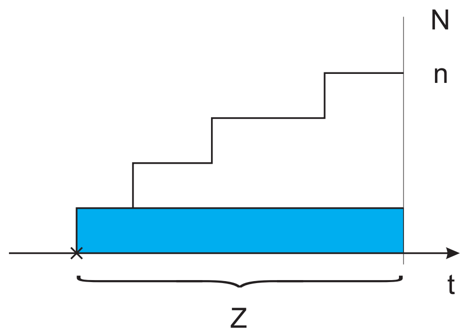
Esim. Tehty työ $M/M/1$-jonossa (jatkoa)

Saapumishetken suhteen on kaksi mahdollisuutta:

a) Asiakas tuli tyhjään systeemiin.

Käänteisessä ajassa hetki Z on hetki, jolloin sisällä olevat n asiakasta ovat poistuneet

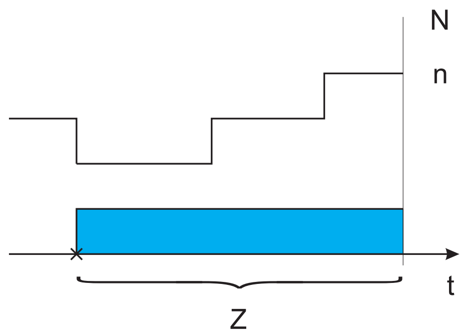
$$\begin{aligned} Z &\sim X_1 + X_2 + \cdots + X_n \\ X_i &\sim \text{Exp}(\mu), \quad i = 1, 2, \ldots, n \\ &\Rightarrow Z \sim \text{Erlang}(n, \mu) \end{aligned}$$



b) Asiakas tuli jonoon: palvelun alkuhetki $-Z$ on edellisen asiakkaan poistumishetki.

Käänteisessä ajassa hetki Z on ensimmäisen asiakkaan saapumishetki

$$Z \sim \text{Exp}(\lambda)$$



Käänteisessä ajassa tarkasteltuna alkutilasta $N = n$ lähtien systeemistä tapahtuu poistumisia $\text{Exp}(\mu)$-väliajoin ja saapumisia $\text{Exp}(\lambda)$-väliajoin. Systeemi joko tyhjenee ensin kokonaan tai tulee uusi saapuminen. Se, joka tapahtuu ensin, määrää ajan Z:

$$Z \sim \min(X, Y), \quad X \sim \text{Erlang}(n, \mu) \quad Y \sim \text{Exp}(\lambda); \qquad X \text{ ja } Y \text{ riippumattomia}$$