

JATKUVAT JAKAUMAT

Laplace-muunnos (Laplace-Stieltjes-muunnos)

Määritelmä

Ei-negatiivisen satunnaismuuttujan $X \geq 0$, jonka tiheysfunktio on $f(x)$, Laplace-muunnos $f^*(s)$ määritellään

$$\boxed{f^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \mathbb{E}[e^{-sX}]} = \int_0^{\infty} e^{-st} dF(t) \quad \text{merkitään myös } \mathcal{L}_X(s)$$

- Matemaattisesti kyseessä on siis tiheysfunktion Laplace-muunnos.
- Jatkuvien satunnaismuuttujien käsittelyssä L-muunnoksella on sama rooli kuin generoivalla funktiolla diskreettien muuttujien tapauksessa.
 - jos X on diskreetti kokonaislukuarvoinen (≥ 0) sm, niin pätee $f^*(s) = \mathcal{G}(e^{-s})$

Summan Laplace-muunnos

Olkoot X ja Y riippumattomia ja niiden L-muunnokset $f_X^*(s)$ ja $f_Y^*(s)$.

$$\begin{aligned} f_{X+Y}^*(s) &= \mathbb{E}[e^{-s(X+Y)}] \\ &= \mathbb{E}[e^{-sX}e^{-sY}] \\ &= \mathbb{E}[e^{-sX}]\mathbb{E}[e^{-sY}] \quad (\text{riippumattomuus}) \\ &= f_X^*(s)f_Y^*(s) \end{aligned}$$

$$f_{X+Y}^*(s) = f_X^*(s)f_Y^*(s)$$

Momenttien laskeminen Laplace-muunnoksen avulla

Derivoimalla nähdään

$$f^{*'}(s) = \frac{d}{ds} \mathbb{E}[e^{-sX}] = \mathbb{E}[-Xe^{-sX}]$$

Vastaavasti n :s derivaatta on

$$f^{*(n)}(s) = \frac{d^n}{ds^n} \mathbb{E}[e^{-sX}] = \mathbb{E}[(-X)^n e^{-sX}]$$

Määräämällä näiden arvot pisteessä $s = 0$ saadaan

$$\mathbb{E}[X] = -f^{*'}(0)$$

$$\mathbb{E}[X^2] = +f^{*''}(0)$$

⋮

$$\mathbb{E}[X^n] = (-1)^n f^{*(n)}(0)$$

Satunnaissumman Laplace-muunnos

Tarkastellaan satunnaissummaa

$$Y = X_1 + \dots + X_N$$

missä X_i :t ovat *i.i.d.* yhteisen L-muunnoksen ollessa $f_X^*(s)$ ja

$N \geq 0$ on kokonaislukuarvoinen sm, jonka generoiva funktio on $\mathcal{G}_N(z)$.

$$\begin{aligned} f_Y^*(s) &= \mathbb{E}[e^{-sY}] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{-sY} \mid N]] && \text{(ulompi odotusarvo } N\text{:n vaihteluiden yli)} \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{-s(X_1+\dots+X_N)} \mid N]] && \text{(sisemmässä odotusarvossa } N \text{ kiinteä)} \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{-s(X_1)}] \dots \mathbb{E}[e^{-s(X_N)}]] && \text{(riippumattomuus)} \\ &= \mathbb{E}[(f_X^*(s))^N] \\ &= \mathcal{G}_N(f_X^*(s)) && \text{(määritelmän mukaan } \mathbb{E}[z^N] = \mathcal{G}_N(z)) \end{aligned}$$

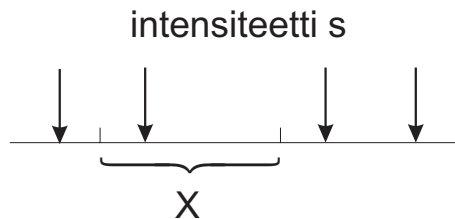
Laplace-muunnos ja kollektiivisten merkkien menetelmä

Annetaan Laplace-muunnokselle

$$f^*(s) = E[e^{-sX}] \quad X \geq 0$$

Tulkinta: Ajatellaan, että X edustaa jonkin välin pituutta. Altistetaan tämä väli poissoniselle merkintäprosessille, jonka intensiteetti on s . Tällöin Laplace-muunnos $f^*(s)$ on todennäköisyys sille, että väli on merkitön.

$$\begin{aligned} P\{X \text{ on merkitön}\} &= E[P\{X \text{ on merkitön} \mid X\}] && \text{(kokonaistodennäköisyys)} \\ &= E[P\{\text{välillä } X \text{ on } 0 \text{ tapahtumaa} \mid X\}] \\ &= E[e^{-sX}] = f^*(s) \end{aligned}$$



$$P\{\text{välillä } X \text{ on } n \text{ tapahtumaa} \mid X\} = \frac{(sX)^n}{n!} e^{-sX}$$

$$P\{\text{välillä } X \text{ on } 0 \text{ tapahtumaa} \mid X\} = e^{-sX}$$

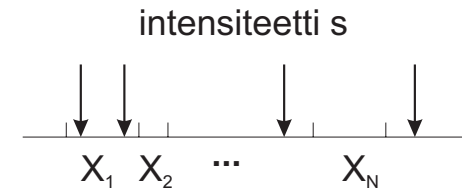
Kollektiivisten merkkien menetelmä (jatkoa)

Esimerkki: Satunnaissumman Laplace-muunnos

$$Y = X_1 + \cdots + X_N, \quad \text{missä}$$

$$\begin{cases} X_1 \sim X_2 \sim \cdots \sim X_N, \text{ yhteinen L-muunnos } f^*(s) \\ N \text{ on sm., jonka generoiva funktio on } \mathcal{G}_N(z) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_Y^*(s) &= \text{P}\{\text{välin } Y \text{ mikään osaväli ei ole merkitty}\} \\ &= \mathcal{G}_N\left(\underbrace{f_X^*(s)}_{\substack{\text{tn. että yksittäi-} \\ \text{nen osaväli ei ole} \\ \text{merkitty}}}\right) \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{\text{tn. että mikään osaväli ei} \\ \text{ole merkitty}}} \end{aligned}$$

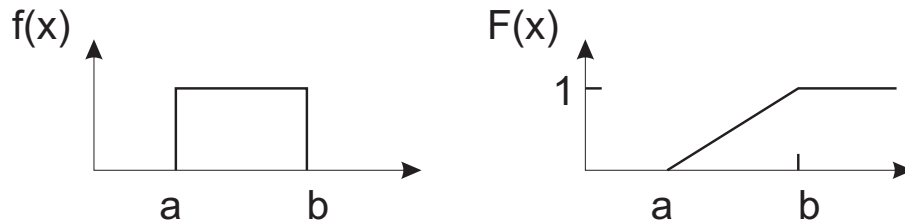


Tasainen jakauma $X \sim U(a, b)$ (uniform distribution)

X :n tiheysfunktiolla on vakioarvo välillä (a, b) :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$$

eli arvo X on valittu väliltä (a, b) umpimähkään.



$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \frac{a+b}{2}$$

$$V[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f(x) dx = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Tasainen jakauma (jatkoa)

Olkoon U_1, \dots, U_n joukko riippumattomia tasanjakautuneita sm:jiä, $U_i \sim U(0, 1)$

- Niiden muuttujien lukumäärä, jotka ovat $\leq x$ ($0 \leq x \leq 1$) on $\sim \text{Bin}(n, x)$
 - tapahtuma $\{U_i \leq x\}$ määrittelee Bernoulli-kokeen, jossa onnistumistn. on x

- Olkoon $U_{(1)}, \dots, U_{(n)}$ suuruusjärjestykseen pantujen arvojen jono.

Määritellään lisäksi $U_{(0)} = 0$ ja $U_{(n+1)} = 1$.

Voidaan osoittaa, että kaikki välit ovat samoinjakautuneita ja

$$P\{U_{(i+1)} - U_{(i)} > x\} = (1 - x)^n \quad i = 1, \dots, n$$

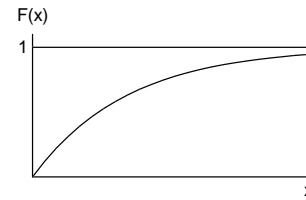
- ensimmäiselle välille $U_{(1)} - U_{(0)} = U_{(1)}$ tulos on selvä, koska $U_{(1)} = \min(U_1, \dots, U_n)$

Eksponttijakauma $X \sim \text{Exp}(\lambda)$

(Huom. Joskus parameriksi kirjoitetaan $1/\lambda$ eli jakauman keskiarvo)

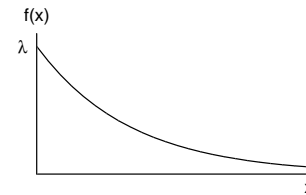
X on ei-negatiivinen jatkuva sm, jonka kertymäfunktio on

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



ja tiheysfunktio

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



Esim. puheluiden saapumisväli; puhelun kesto

Eksponttijakauman Laplace-muunnos ja momentit

$\text{Exp}(\lambda)$ -jakautuneen satunnaismuuttujan Laplace-muunnos on

$$f^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{\lambda}{\lambda + s}$$

Tämän avulla lasketaan momentit:

$$E[X] = -f^{*'}(0) = \frac{\lambda}{(\lambda+s)^2} \Big|_{s=0} = \frac{1}{\lambda}$$

$$E[X^2] = +f^{*''}(0) = \frac{2\lambda}{(\lambda+s)^3} \Big|_{s=0} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$V[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

$E[X] = \frac{1}{\lambda} \quad V[X] = \frac{1}{\lambda^2}$

Eksponttijakauman muistittomuusominaisuus

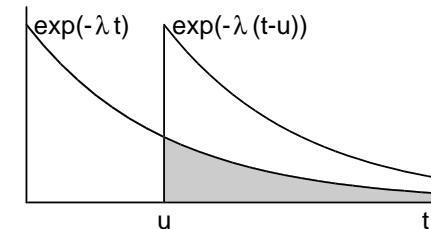
Oletetaan, että $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ edustaa esim. yhteyden kestoa.

Kysytään, mikä on tn. että yhteys kestää vielä vähintään ajan x , jos se on jo kestänyt ajan t :

$$\begin{aligned} P\{X > t + x | X > t\} &= \frac{P\{X > t + x, X > t\}}{P\{X > t\}} \\ &= \frac{P\{X > t + x\}}{P\{X > t\}} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+x)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda x} = P\{X > x\} \end{aligned}$$

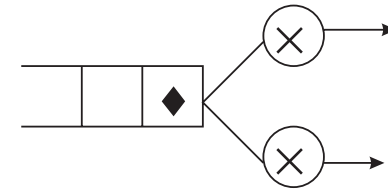
$$P\{X > t + x | X > t\} = P\{X > x\}$$

- Yhteyden jäljelläolevan keston jakauma ei riipu lainkaan siitä, kauanko yhteys on jo jatkunut
- On samalla tavalla $\text{Exp}(\lambda)$ -jakautunut kuin yhteyden kokonaiskesto.



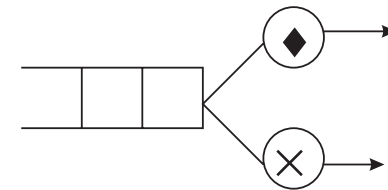
Esimerkki muistittomuusominaisuudesta

Jonojärjestelmässä on kaksi palvelinta. Palveluajat ovat eksponentiaalisesti jakautuneita. Asiakkaan (\diamond) saapuessa molemmat palvelimet ovat varattuja (\times) mutta muita odottavia asiakkaita ei ole.



Kysytään: mikä on todennäköisyys, että asiakas (\diamond) poistuu järjestelmästä viimeisenä?

Seuraava tapahtuma järjestelmässä on se, että jompikumpi asiakkaista (\times) poistuu ja asiakas (\diamond) siirtyy vapautuneeseen palvelimeen.



Muistittomuudesta johtuen tästä hetkestä eteenpäin kummankin asiakkaan (\diamond) ja (\times) palveluajat (jäljellä oleva palveluaika) ovat samalla tavalla exp-jakautuneet. Tilanne on täysin symmetrinen ja siten todennäköisyys, että asiakas (\diamond) poistuu viimeisenä, on $1/2$.

Eksponttijakautuneen suureen päättymistodennäköisyys

Oletetaan, että kestoaltaan $\text{Exp}(\lambda)$ -jakautunut yhteys on jatkunut ajan t .

Mikä on todennäköisyys, että se päättyy (infinitesimaalisen) lyhyen ajan h kuluessa?

$$\begin{aligned} P\{X \leq t + h \mid X > t\} &= P\{X \leq h\} \quad (\text{muistittomuus}) \\ &= 1 - e^{-\lambda h} \\ &= 1 - (1 - \lambda h + \frac{1}{2}(\lambda h)^2 - \dots) \\ &= \lambda h + o(h) \end{aligned}$$

Päättymistodennäköisyys aikayksikköä kohden = λ (vakio!)

Eksponttijakautuneiden suureiden minimi ja maksimi

Oletetaan $X_1 \sim \dots \sim X_n \sim \text{Exp}(\lambda)$ (i.i.d.)

Näiden minimin häntätodennäköisyys on

$$\begin{aligned} P\{\min(X_1, \dots, X_n) > x\} &= P\{X_1 > x\} \cdots P\{X_n > x\} && \text{(riippumattomuus)} \\ &= (e^{-\lambda x})^n = e^{-n\lambda x} \end{aligned}$$

Minimi noudattaa siis jakaumaa $\text{Exp}(n\lambda)$.

Minimin päättymistiheys = $n\lambda$

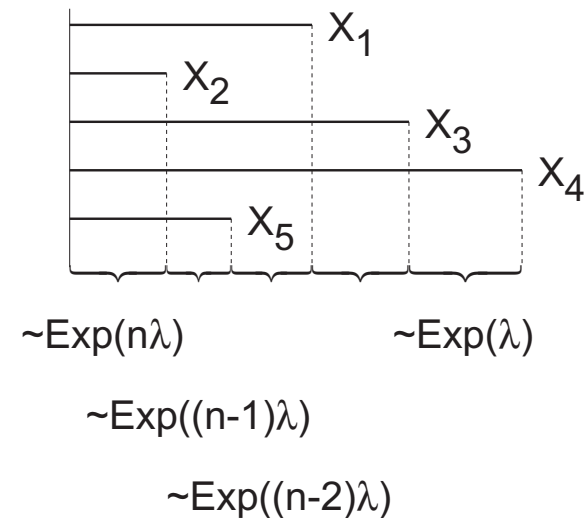
n rinnakkaista prosessia, joista kukin päättyy muista riippumatta intensiteetillä λ

Maksimien kertymäfunktio on

$$P\{\max(X_1, \dots, X_n) \leq x\} = (1 - e^{-\lambda x})^n$$

Odotusarvo voidaan päätellä kuvan tarkastelun avulla

$$E[\max(X_1, \dots, X_n)] = \frac{1}{n\lambda} + \frac{1}{(n-1)\lambda} + \dots + \frac{1}{\lambda}$$



Erlangin jakauma $X \sim \text{Erlang}(n, \lambda)$ Merkitään myös Erlang- $n(\lambda)$.

X on n :n riippumattoman $\text{Exp}(\lambda)$ -jakautuneen sataunnaismuuttujan summa

$$X = X_1 + \cdots + X_n \quad X_i \sim \text{Exp}(\lambda) \quad (i.i.d.)$$

Sen Laplace-muunnos on

$$f^*(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s} \right)^n$$

Käänteismuuntamalla (tai rekursiivisesti tiheysfunktioita konvoluoimalla) saadaan summan tiheysfunktio

$$\boxed{f(x) = \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda x}} \quad x \geq 0$$

Erlangin jakauma (jatkoa): gammajakauma

Erlangin jakauman tiheysfunktion kaava voidaan yleistää kokonaislukujen n asemesta mielivaltaisille positiivisille reaaliarvoille korvaamalla kertomafunktio $(n-1)!$ reaaliarvoisella yleistyksellään eli gammafunktioilla $\Gamma(n)$:

$$f(x) = \frac{(\lambda x)^{p-1}}{\Gamma(p)} \lambda e^{-\lambda x}$$

Gamma(p, λ)-jakauma

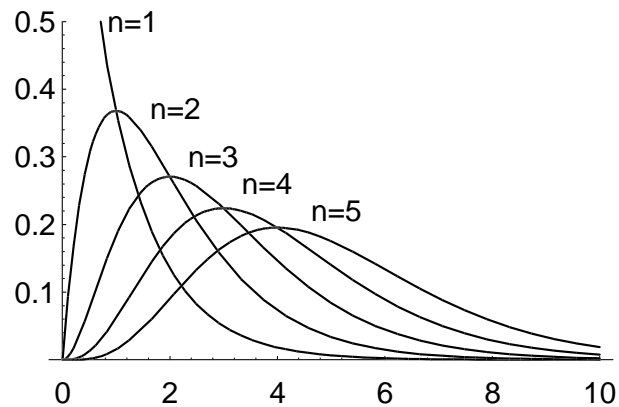
Gammafunktio $\Gamma(p)$ määritellään

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{p-1} du$$

Osittaisintegroinnilla on helppo nähdä, että kun p on kokonaisluku, niin todellakin $\Gamma(p) = (p-1)!$

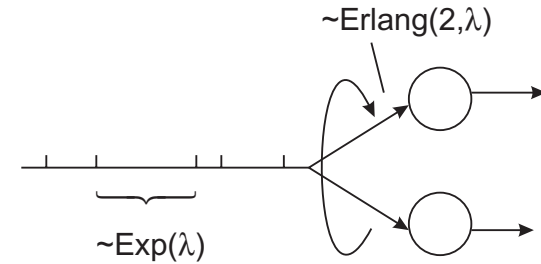
Odotusarvo ja varianssi ovat n -kertaiset Exp(λ)-jakauman vastaaviin:

$$E[X] = \frac{n}{\lambda} \quad V[X] = \frac{n}{\lambda^2}$$



Erlangin jakauma (jatkoa)

Esimerkki. Järjestelmässä on kaksi palvelinta. Asiakkaita saapuu $\text{Exp}(\lambda)$ -jakautunein väliajoin. Joka toinen asiakas ohjataan palvelimeen 1 ja joka toinen palvelimeen 2.

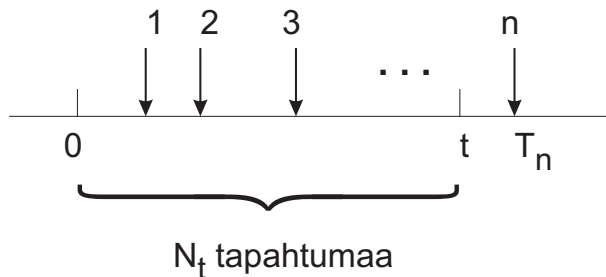


Palvelimeen saapuvien asiakkaiden väliaikajakauma on $\text{Erlang}(2, \lambda)$.

Lause. Olkoon N_t tapahtumien lukumäärä t :n pituisella välillä Poisson-jakautunut:

$$N_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$$

Tällöin aika T_n mielivaltaisesta tapahtumasta n :nteen tapahtumaan sen jälkeen noudattaa jakaumaa $\text{Erlang}(n, \lambda)$.



Todistus.

$$F_{T_n}(t) = P\{T_n \leq t\} = P\{N_t \geq n\}$$

$$= \sum_{i=n}^{\infty} P\{N_t = i\} = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}$$

$$\begin{aligned} f_{T_n} &= \frac{d}{dt} F_{T_n}(t) = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{i \lambda (\lambda t)^{i-1}}{i!} e^{-\lambda t} - \sum_{i=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \lambda e^{-\lambda t} \\ &= \sum_{i=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{i-1}}{(i-1)!} \lambda e^{-\lambda t} - \sum_{i=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \lambda e^{-\lambda t} \\ &= \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Normaalijakauma $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Parametreilla μ ja σ^2 normaalijakautuneen satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2}$$

Parametrit μ ja σ^2 ovat jakau-
man keskiarvo ja varianssi

$$\begin{cases} E[X] = \mu \\ V[X] = \sigma^2 \end{cases}$$

Lause: Jos $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, niin $Y = \alpha X + \beta \sim N(\alpha\mu + \beta, \alpha^2\sigma^2)$.

Todistus:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{X \leq \frac{y-\beta}{\alpha}\} = F_X\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right) \\ &= \int_{-\infty}^{(y-\beta)/\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2} dx && z = \alpha x + \beta \\ &= \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\alpha\sigma)} e^{-\frac{1}{2}(z-(\alpha\mu+\beta))^2/(\alpha\sigma)^2} dz \end{aligned}$$

Seuraus: $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ ($\alpha = 1/\sigma$, $\beta = -\mu/\sigma$)

Merkitään $\Phi(x)$:llä $N(0,1)$ -muuttujan kertymäfunktioita. Tällöin

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\{Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\} = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Monen muuttujan gaussinen jakauma

Olkoon X_1, \dots, X_n joukko gaussisia (ts. normaali-jakautuneita) satunnaismuuttujia, joiden odotusarvot ovat μ_1, \dots, μ_n ja kovarianssimatriisi

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & \cdots & \sigma_{1n}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1}^2 & \cdots & \sigma_{nn}^2 \end{pmatrix} \quad \sigma_{ij}^2 = \text{Cov}[X_i, X_j] \quad (\sigma_{ii}^2 = \text{V}[X_i])$$

Merkitään $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$.

Satunnaisvektorin \mathbf{X} tiheysfunktio on

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\mathbf{\Gamma}|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T \mathbf{\Gamma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}$$

missä $|\mathbf{\Gamma}|$ on kovarianssimatriisin determinantti.

Muuttujanvaihdolla nähdään helposti, että satunnaisvektorin $\mathbf{Z} = \mathbf{\Gamma}^{-1/2}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})$ tiheysfunktio on $(2\pi)^{-n/2} \exp(-\frac{1}{2}\mathbf{z}^T \mathbf{z}) = \sqrt{2\pi} e^{-z_1^2/2} \cdots \sqrt{2\pi} e^{-z_n^2/2}$.

Siten vektorin \mathbf{Z} komponentit ovat riippumattomia $N(0,1)$ -jakautuneita satunnaismuuttujia.

Kääntäen $\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{\Gamma}^{1/2} \mathbf{Z}$, jonka avulla voidaan generoida \mathbf{X} :n arvoja simuloinneissa.