

# STOKASTISET PROSESSIT

## Peruskäsitteitä

Usein tarkasteltava järjestelmä kehittyy ajan mukana ja meitä kiinnostaa sen dynaaminen, yleensä satunnaisuutta sisältävä käyttäytyminen.

- jonon pituus
- kurssin S-38.143 läpäisseiden opiskelijoiden määrä eri vuosina
- ulkolämpötila
- verkossa olevien datapakettien määrä eri hetkinä

Stokastinen prosessi  $X_t$  (tai  $X(t)$ ) on perhe satunnaismuuttujia, joita parametri  $t$  (yleensä aika) indeksoi.

Muodollisesti stokastinen prosessi on kuvaus otosavaruudesta  $\mathcal{S}$  parametrin  $t$  funktiolle. Jokaiseen  $\mathcal{S}$ :n alkioon  $e$  liittyy funktio  $X_t(e)$ .

- Annetulla arvolla  $e$   $X_t(e)$  on ajan funktio (“urnasta vedetään arpalippu  $e$ , johon on piirretty ajan funktion kuvaaja”)
- Annetulla arvolla  $t$   $X_t(e)$  on satunnaismuuttuja
- Annetuilla arvoilla  $e$  ja  $t$   $X_t(e)$  on luku

Annetulla arvolla  $e$  saatua (arvottua)  $t$ :n funktiota  $X_t(e)$  kutsutaan satunnaisprosessin realisaatioksi (trajektori, otospolku).

Tila-avaruus:  $X_t$ :n arvojen joukko

Parametriavaruus:  $t$ :n arvojen joukko

Satunnaisprosesseja voidaan luokitella sen mukaan, ovatko nämä avaruudet jatkuvia vai diskreettejä:

Parametriav.	Tila-avaruus	
	Diskreetti	Jatkuva
Diskreetti	*	**
Jatkuva	* * *	* * **

Parametriavaruuden tyypin mukaan puhutaan diskreettiaikaisista ja jatkuva-aikaisista satunnaisprosesseista.

Diskreettiaikaisista satunnaisprosesseista käytetään myös nimitystä satunnaisjono.

Stokastisten prosessien osalta ollaan kiinnostuneita seuraavan kaltaisista suureista:

- Stationaarinen jakauma: määrittelee todennäköisyydet, joilla  $X_t$  saa arvoja tila-avaruuden eri osajoukoissa, kun  $t \rightarrow \infty$  (olettaen, että ko. todennäköisyydet lähenevät tiettyä rajaa)
- Eri ajanhetkiin  $s$  ja  $t$  liittyvien satunnaismuuttujien  $X_s$  ja  $X_t$  välinen relaatio (esim. kovarianssi tai korrelaatio)
- Osumatodennäköisyys: todennäköisyys, että tietty tila-avaruuden piste tai osajoukko milloinkaan saavutetaan
- Ensiohituksen aika (first passage time): ajanhetki jona satunnaisprosessi ensimmäisen kerran saavuttaa annetun tilan tai tilajoukon lähtien jostakin annetusta alkutilasta

Stokastisen prosessin  $X_t$   $n$ :nnen kertaluvun statistiikka määrää yhteisjakauman

$$F_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}}(x_1, \dots, x_n) = P\{X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n\}$$

kaikille mahdollisilla parametrijoukoilla  $\{t_1, \dots, t_n\}$ .

Stokastisen prosessin  $X_t$  täydellinen karakterisointi edellyttää kaikkien kertalukujen statistiikkojen tuntemista.

1. kertaluvun statistiikkaa:

Stationaarinen jakauma

$$F(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{X_t \leq x\}$$

Odotusarvo (hetkellä  $t$ )

$$\bar{X}_t = E[X_t]$$

2. kertaluvun statistiikkaa:

Kovarianssi (autokovarianssi)

$$R_{t,s} = E[(X_t - \bar{X}_t)(X_s - \bar{X}_s)]$$

Stationaarinen prosessi

Kaikkien kertalukujen statistiikat ovat invariantteja ajan siirron suhteen

$$F_{X_{t_1+\tau}, \dots, X_{t_n+\tau}}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}}(x_1, \dots, x_n) \quad \forall n, \forall t_1, \dots, t_n$$

Laajassa mielessä stationaarinen prosessi

$$\bar{X}_t = \text{vakio}, \quad R_{t+\tau, s+\tau} = R_{t, s} \quad \forall \tau \quad \text{1. ja 2. kertaluvun statistiikat siirtainvariantteja}$$

Stationaaristen lisäysten prosessi

$$X_{t+\tau} - X_t \quad \text{on stationaarinen prosessi} \quad \forall \tau$$

Riippumattomien lisäysten prosessi

$$X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \quad \text{ovat riippumattomia} \quad \forall t_1 < t_2 < \dots < t_n$$

Ergodinen prosessi

Prosessin koko statistiikka voidaan määrätä yhdestä (äärettömän pitkistä) realisaatiosta.

## Markov-prosessi

Markov-prosessiksi kutsutaan stokastista prosessia, jolla on ns. Markovin ominaisuus:

$$\boxed{P\{X_{t_n} \leq x_n \mid X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \dots, X_{t_1} = x_1\} = P\{X_{t_n} \leq x_n \mid X_{t_{n-1}} = x_{n-1}\}} \quad \forall n, \forall t_1 < \dots < t_n$$

- Markov-prosessin tuleva kehitys ehdollistettuna prosessin nykyiseen ( $X_{t_{n-1}}$ ) ja sitä edeltäneisiin tiloihin riippuu vain prosessin nykyisestä tilasta (ei siitä, miten tähän on tultu).
- Nykyinen tila sisältää kaiken tiedon (yhteenvedon menneisyydestä), mitä tarvitaan prosessin tulevan (stokastisen) käyttäytymisen määrittämiseen.
- Annettuna prosessin tila jollakin hetkellä sen tulevaisuus ja menneisyys ovat toisistaan riippumattomia.

Esim. Riippumattomien lisäysten prosessi on aina Markov-prosessi.

$$X_{t_n} = X_{t_{n-1}} + \underbrace{(X_{t_n} - X_{t_{n-1}})}_{\text{lisäys on riippumaton kaikista aikaisemmista lisäyksistä, jotka ovat johtaneet tilaan } X_{t_{n-1}}}$$

## Markov-ketju

Termi Markov-ketju liitetään kirjallisuudessa vaihtelevasti joko siihen, että Markov-prosessi on diskreettiaikainen tai että se on diskreettitilainen.

Jatkossa termin käyttö rajoittuu etupäässä tapaukseen, jossa prosessi on sekä diskreetti-aikainen että diskreettitilainen.

- Yleisyyden kärsimättä voimme merkitä diskreettejä ajanhetkiä kokonaisluvuilla.
  - Markovin ketju on siis prosessi  $X_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$
- Samoin merkitsemme systeemin tiloja kokonaisluvuilla  $X_n = 0, 1, \dots$  (tilajoukko voi olla joko ääretön tai äärellinen).

Seuraavassa oletamme lisäksi, että prosessi on aikahomogeeninen.

Tällaisen prosessin käyttäytymisen määräävät (yhden askeleen) siirtymätodennäköisyydet (siirtymä tilasta  $i$  tilaan  $j$ ):

$$p_{i,j} = P\{X_n = j \mid X_{n-1} = i\}$$

aikahomogeenisuus: siirtymätodennäköisyys ei riipu  $n$ :stä

## Polun todennäköisyys

Polun  $i_0, i_1, \dots, i_n$  todennäköisyys on

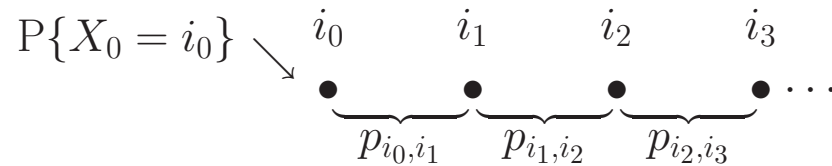
$$P\{X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n\} = P\{X_0 = i_0\} p_{i_0, i_1} p_{i_1, i_2} \cdots p_{i_{n-1}, i_n}$$

Todistus

$$P\{X_0 = i_0, X_1 = i_1\} = \underbrace{P\{X_1 = i_1 | X_0 = i_0\}}_{p_{i_0, i_1}} P\{X_0 = i_0\}$$

$$\begin{aligned} P\{X_0 = i_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2\} &= \underbrace{P\{X_2 = i_2 | X_1 = i_1, X_0 = i_0\}}_{p_{i_1, i_2}} \underbrace{P\{X_1 = i_1, X_0 = i_0\}}_{p_{i_0, i_1} P\{X_0 = i_0\}} \\ &= P\{X_0 = i_0\} p_{i_0, i_1} p_{i_1, i_2} \end{aligned}$$

Vastaavalla tavalla todistusta voidaan jatkaa pidempiin sekvensseihin.





## Markovin ketjun siirtymämatriisi

Siirtymätodennäköisyyksistä voidaan muodostaa siirtymämatriisi  $\mathbf{P} = (p_{i,j})$

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \text{lopputila} \rightarrow \\ \left( \begin{array}{cccc} p_{0,0} & p_{0,1} & p_{0,2} & \dots \\ p_{1,0} & p_{1,1} & p_{1,2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \right) \downarrow \text{alkutila} \end{array}$$

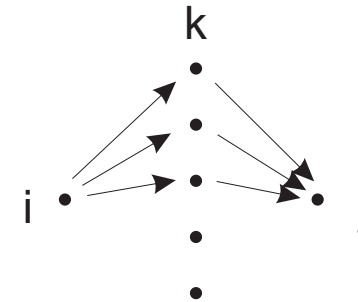
- Vaakariveillä on siirtymätodennäköisyydet tilasta  $i$  muihin tiloihin.
  - koska aina siirrytään johonkin tilaan, näiden todennäköisyyksien summa on 1
- Matriisia, jonka elementit ovat ei-negatiivisia lukuja ja jonka rivisummat ovat ykkösiä, sanotaan stokastiseksi matriisiksi.
- Voidaan helposti osoittaa, että kahden stokastisen matriisin tulo on stokastinen matriisi.

## Usean askeleen siirtymämatriisi

Todennäköisyys, että systeemi lähdettyään tilasta  $i$  on kahden siirtymäaskeleen jälkeen tilassa  $j$ , on

$$\sum_k p_{i,k} p_{k,j}$$

(otetaan huomioon kaikki polut välitilan  $k$  kautta).



Tämä on selvästi matriisin  $\mathbf{P}^2$  elementti  $\{i, j\}$ .

Vastaavasti nähdään, että  $n$ :n askeleen siirtymämatriisi on  $\mathbf{P}^n$ .

Merkitään tämän elementtejä  $p_{i,j}^{(n)}$ :llä (yläindeksi viittaa siihen, että kyseessä on  $n$ :n askeleen siirtymämatriisi). Koska pätee  $\mathbf{P}^n = \mathbf{P}^m \cdot \mathbf{P}^{n-m}$  ( $0 \leq m \leq n$ ), voidaan kirjoittaa komponenttimuodossa

$$p_{i,j}^{(n)} = \sum_k p_{i,k}^{(m)} p_{k,j}^{(n-m)}$$

Chapmanin ja Kolmogorovin yhtälö

Kysymyksessä on kokonaistodennäköisyyden kaava, jossa siirtyminen  $n$ :llä askeleella tilasta  $i$  tilaan  $j$  on ehdollistettu siihen, että  $m$ :n askeleen jälkeen ollaan tilassa  $k$ .

## Tilatodennäköisyydet

Merkitään

$$\boxed{\pi_i^{(n)} = \mathbb{P}\{X_n = i\}}$$

todennäköisyys, että prosessi on tilassa  $i$  hetkellä  $n$

Muodostetaan hetkeen  $n$  liittyvistä tilatodennäköisyyksistä tilatodennäköisyysvektori

$$\boxed{\boldsymbol{\pi}^{(n)} = (\pi_0^{(n)}, \pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}, \dots)}$$

Kokonaistodennäköisyyden kaavan perusteella pätee

$$\mathbb{P}\{X_1 = i\} = \sum_k \mathbb{P}\{X_1 = i \mid X_0 = k\} \mathbb{P}\{X_0 = k\}$$

eli  $\pi_i^{(1)} = \sum_k \pi_k^{(0)} p_{k,i}$  ja vektorimuodossa  $\boldsymbol{\pi}^{(1)} = \boldsymbol{\pi}^{(0)} \mathbf{P}$

Koska prosessi on markovinen ja  $\boldsymbol{\pi}^{(1)}$  edustaa alkutodennäköisyyksiä seuraavassa askeleessa,

$$\boldsymbol{\pi}^{(2)} = \boldsymbol{\pi}^{(1)} \mathbf{P} \quad \text{ja yleisesti} \quad \boldsymbol{\pi}^{(n)} = \boldsymbol{\pi}^{(n-1)} \mathbf{P}$$

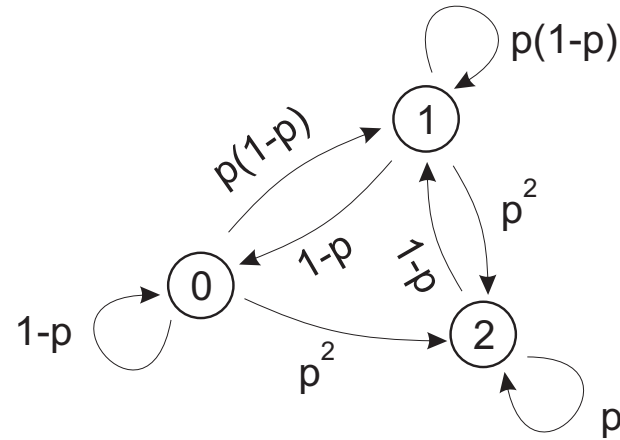
josta seuraa rekursiivisesti

$$\boxed{\boldsymbol{\pi}^{(n)} = \boldsymbol{\pi}^{(0)} \mathbf{P}^n}$$

(Huom.  $\mathbf{P}^n$  on  $n$ :n askeleen siirtymämatriisi.)

Esimerkki

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-p & p(1-p) & p^2 \\ 1-p & p(1-p) & p^2 \\ 0 & 1-p & p \end{pmatrix} \quad p = 1/3$$



$$\mathbf{P} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6666 & 0.2222 & 0.1111 \\ 0.6666 & 0.2222 & 0.1111 \\ 0 & 0.6666 & 0.3333 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^2 = \frac{1}{9^2} \begin{pmatrix} 48 & 22 & 11 \\ 48 & 22 & 11 \\ 36 & 30 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5926 & 0.2716 & 0.1358 \\ 0.5926 & 0.2716 & 0.1358 \\ 0.4444 & 0.3704 & 0.1852 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^3 = \frac{1}{9^3} \begin{pmatrix} 420 & 206 & 103 \\ 420 & 206 & 103 \\ 396 & 222 & 111 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5761 & 0.2826 & 0.1413 \\ 0.5761 & 0.2826 & 0.1413 \\ 0.5432 & 0.3045 & 0.1523 \end{pmatrix}$$

⋮

$$\mathbf{P}^8 = \begin{pmatrix} 0.5714 & 0.2857 & 0.1429 \\ 0.5714 & 0.2857 & 0.1429 \\ 0.5714 & 0.2857 & 0.1429 \end{pmatrix}$$

Kun lähdetään alkutilasta  $i$ , niin lopputilan todennäköisyysjakauma näkyy riviltä  $i$ .

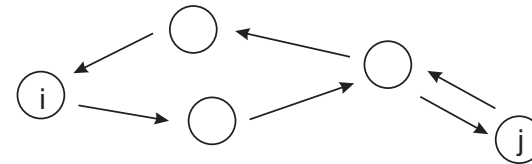
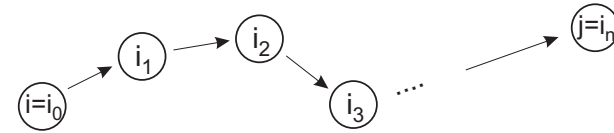
Kahdeksan askeleen jälkeen lopputilajakauma on neljällä numerolla riippumaton alkutilasta: “prosessi unohtaa alkutilan”.

## Markov-prosessin tilojen luokittelu

Tila  $i$  johtaa tilaan  $j$  (merkitään  $i \rightarrow j$ ), jos on olemassa polku  $i_0 = i, i_1, \dots, i_n = j$  siten, että kaikki tilasiirtymätodennäköisyydet ovat positiivisia,  $p_{i_k, i_{k+1}} > 0$ ,  $k = 0, \dots, n - 1$ .

Tällöin  $(\mathbf{P}^n)_{i,j} > 0$ .

Tilat  $i$  ja  $j$  kommunikoivat (merkitään  $i \leftrightarrow j$ ), jos  $i \rightarrow j$  ja  $j \rightarrow i$ .



Kommunikoivuus on ekvivalenssirelaatio: tilat voidaan jakaa luokkiin siten, että

- kunkin luokan sisällä kaikki tilat kommunikoivat keskenään
- mitkään kaksi eri luokista otettua tilaa eivät kommunikoivat keskenään

Relaation  $\leftrightarrow$  määäämiä ekvivalenssiluokkia kutsutaan pelkistymättömiksi (irreducible) luokiksi

Markov-ketju on pelkistymätön, jos sen tila-avaruus muodostaa yhden pelkistymättömän luokan (kaikki tilat kommunikoivat keskenään).

## Tilojen luokittelu (jatkoa)

Tilajoukko on suljettu, jos mikään sen tiloista ei johda mihinkään joukon ulkopuolisista tiloista.

Tilaa, joka yksinään muodostaa suljetun joukon, kutsutaan absorboivaksi tilaksi

- absorboivalla tilalla pätee  $p_{i,i} = 1$
- tilaan voidaan tulla muista tiloista, mutta siitä ei siirrytä pois

Jokainen tila on joko transientti tai palautuva tila.

- Tila  $i$  on transientti, mikäli todennäköisyys palata tilaan  $i$  on  $< 1$ .  
Ts. on äärellinen todennäköisyys, ettei tilaan milloinkaan palata.
- Tila  $i$  on palautuva (recurrent), mikäli todennäköisyys palata tilaan  $i$  on  $= 1$ .  
Ts. varmuudella tilaan palataan joskus.

Palautuvat tilat erotellaan vielä paluuajan  $T_{i,i}^1$  odotusarvon mukaan:

positiivisesti palautuva (positive recurrent)  
paluuajan odotusarvo  $< \infty$

nollapalautuva (null recurrent)  
paluuajan odotusarvo  $= \infty$

---

<sup>1</sup>Tilan  $i$  paluu aika  $T_{i,i}$  on askelten lukumäärä, joka kuluu tilasta  $i$  lähdön jälkeen paluuseen tilaan  $i$ .

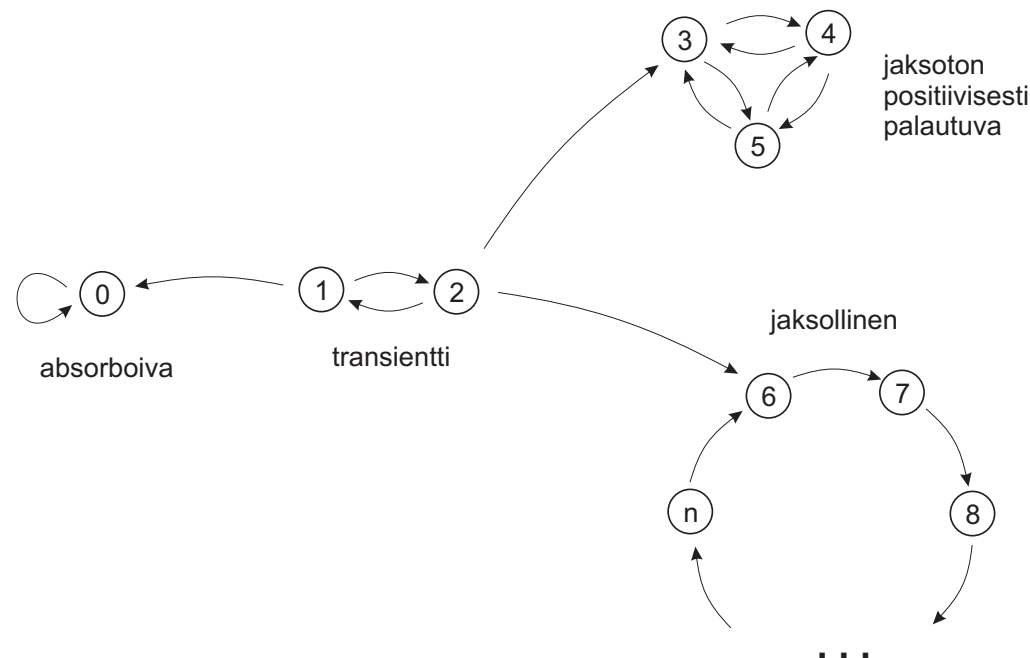
### Tilojen luokittelu (jatkoa)

Tyyppi	Käyntien lkm.	$E[T_{i,i}]$
Transientti	$< \infty$	$\infty$
Nollapalautuva	$\infty$	$\infty$
Posit. palautuva	$\infty$	$< \infty$

Jos tilan  $i$  paluuaika voi olla vain jonkin (kokonais)luvun  $d > 1$  monikerta, tilaa  $i$  sanotaan jaksolliseksi. Muutoin tila on jaksoton.

Jaksoton positiivisesti palautuva tila on ergodinen

Markov-ketju on ergodinen, jos sen kaikki tilat ovat ergodisia.



## Tilojen luokittelu (jatkoa)

Lause: Pelkistymättömällä Markov-ketjulla joko

- kaikki tilat ovat transientteja
- kaikki tilat ovat nollapalautuvia
- kaikki tilat ovat positiivisesti palautuvia

### Huomioita tilan elinajasta ja paluuajasta

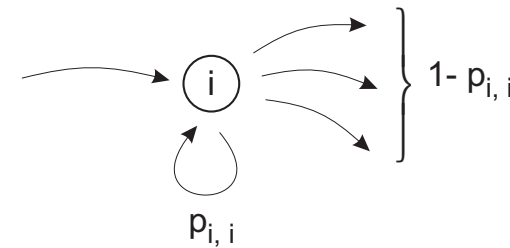
Askelten lukumäärä, jonka järjestelmä peräkkäin viipyy tilassa  $i$  on geometrisesti jakautunut

$$\sim \text{Geom}(1 - p_{i,i})$$

koska tilasta poistuminen tapahtuu tn:llä  $1 - p_{i,i}$ .

Jokaisen tilassa  $i$  käynnin jälkeen paluu aika  $T_{i,i}$  takaisin tilaan  $i$  on riippumaton muiden käyntien jälkeisistä paluuajoista (seuraa Markovisuudesta).

$$\text{Merkitään } \bar{T}_i = E[T_{i,i}] \quad \bar{T}_i = \begin{cases} \infty & \text{jos tila on transientti tai nollasti palautuva} \\ < \infty & \text{jos tila on positiivisesti palautuva} \end{cases}$$





## Kolmogorovin teoreema

Pelkistymättömällä ja jaksottomalla Markov-ketjulla on aina olemassa rajatodennäköisyydet

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_j^{(n)} = 1/\bar{T}_j$$

ja nämä ovat alkutilasta riippumattomat.

Lisäksi pätee joko

i) ketjun kaikki tilat ovat transientteja tai kaikki tilat ovat nollapalautuvia, jolloin  $\pi_j = 0, \forall j$ ,

tai

ii) ketjun kaikki tilat ovat positiivisesti palautuvia, jolloin tasapainotilan todennäköisyydet saadaan yhtälöiden

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{P} \\ \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{e}^T = 1 \end{array}$$

eli

$$\pi_j = \sum_i \pi_i p_{i,j} \quad \text{ja} \quad \sum_j \pi_j = 1$$

( $\mathbf{e}$  on vaakavektori, jonka kaikki komponentit ovat ykkösiä, ja  $\mathbf{e}^T$  vastaava pystyvektori)

yksikäsitteisinä ratkaisuinä.

## Huomioita tasapainojakaumasta

Jos rajatodennäköisyydet (vektorin komponentit)  $\boldsymbol{\pi}$  ovat olemassa, ne välttämättä toteuttavat yhtälön  $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$ , sillä

$$\boldsymbol{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \boldsymbol{\pi}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \boldsymbol{\pi}^{(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \boldsymbol{\pi}^{(n)} \cdot \mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$$

Yhtälö  $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$  voidaan lausua myös muodossa:  $\boldsymbol{\pi}$  on matriisin  $\mathbf{P}$  ominaisarvoon 1 liittyvä (vasemmanpuoleinen) ominaisvektori (tai matriisin  $(\mathbf{P} - \mathbf{I})$  ominaisarvoon 0 liittyvä ominaisvektori).

$\pi_j$  kertoo, minkä osan ajasta (askeleista) systeemi viettää tilassa  $j$ .

Rajajakaumaa  $\pi_j$  kutsutaan stationaariseksi jakaumaksi tai tasapainotilan todennäköisyydeksi

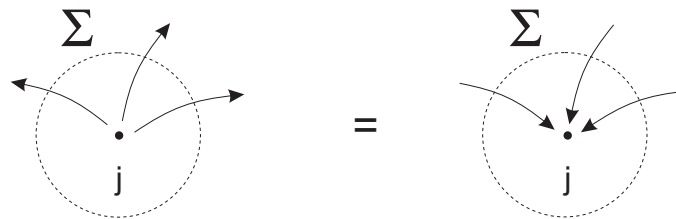
Huom. Tasapainotila ei tarkoita sitä, etteikö systeemissä tapahtuisi mitään, vaan että systeemin alkutilaan liittyvä tieto on “unohtunut” tai “huuhtoutunut pois” järjestelmän stokastisen kehityksen tuloksena.

### Globaali tasapainoehto

Ehtoa  $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi P}$  eli  $\pi_j = \sum_i \pi_i p_{i,j}$ ,  $\forall j$ , kutsutaan usein (globaaliksi) tasapainoehdoksi.

Koska  $\sum_i p_{j,i} = 1$  (aina siirrytään johonkin tilaan), voidaan kirjoittaa

$\underbrace{\sum_i \pi_j p_{j,i}}_{\text{tn. että ollaan tilassa } j \text{ ja siirrytään siitä johonkin muuhun tilaan}}$	$=$	$\underbrace{\sum_i \pi_i p_{i,j}}_{\text{tn. että ollaan jossain muussa tilassa ja siirrytään siitä tilaan } j}$	Yksi yhtälö kutakin tilaa $j$ kohti.  Todennäköisyysvirtojen tasapaino: tilasta $j$ lähdetään yhtä usein kuin sinne tullaan.
--	-----	---	--



- Jos tasapainoehtojen tiedetään olevan voimassa tila-avaruuden kaikissa muissa tiloissa paitsi yhdessä tilassa, ovat ne automaattisesti voimassa myös kyseisessä tilassa (todennäköisyysvirtojen “säilymlain” perusteella)
- – tasapainoyhtälöt ovat lineaarisesti riippuvia  
 (⇒ homogeeniyhtälöllä  $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi P}$  on nollasta poikkeava ratkaisu)
  - homogeeniyhtälön ratkaisu on vakiotekijää vaille määrätty
  - vakiotekijän kiinnittämiseksi tarvitaan normiehto  $\sum_j \pi_j = 1$

Esimerkki. Palataan aikaisempaan esimerkkiin (yleisellä arvolla  $p$ ).

$$(\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2) = (\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2) \begin{pmatrix} 1-p & p(1-p) & p^2 \\ 1-p & p(1-p) & p^2 \\ 0 & 1-p & p \end{pmatrix}$$

Kirjoitetaan kaksi ensimmäistä yhtälöä (vp. ja op. vektorien kahta ensimmäistä komponenttia koskevat yhtäsuuruusehdot)

$$\pi_0 = (1-p)\pi_0 + (1-p)\pi_1 \quad \Rightarrow \quad \pi_0 = \frac{1-p}{p} \pi_1$$

$$\begin{aligned} \pi_1 &= p(1-p)\pi_0 + p(1-p)\pi_1 + (1-p)\pi_2 \\ &= (1-p)^2\pi_1 + p(1-p)\pi_1 + (1-p)\pi_2 \end{aligned}$$

$$= (1-p)\pi_1 + (1-p)\pi_2 \quad \Rightarrow \quad \pi_1 = \frac{1-p}{p} \pi_2 \quad \Rightarrow \quad \pi_0 = \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 \pi_2$$

eli

$$\boldsymbol{\pi} = \left( \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 \quad \frac{1-p}{p} \quad 1 \right) \pi_2 .$$

Soveltamalla normiehtoa  $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$ , saadaan

$$\boldsymbol{\pi} = \left( \frac{(1-p)^2}{1-p(1-p)} \quad \frac{p(1-p)}{1-p(1-p)} \quad \frac{p^2}{1-p(1-p)} \right) \quad \text{Arvolla } p = \frac{1}{3}: \quad \boldsymbol{\pi} = (0.5714 \quad 0.2857 \quad 0.1429)$$

## Tasapainoyhtälön ratkaisemisesta

Kuten edellä on tullut ilmi tasapainoyhtälöiden ratkaiseminen tapahtuu yleisesti seuraavasti (oletetaan äärellinen tila-avaruus, jossa on  $n$  tilaa):

- Kirjoitetaan tasapainoyhtälö kaikille muille tiloille paitsi yhdelle ( $n - 1$  yhtälöä)
  - nämä yhtälöt määräävät tasapainotodennäköisyyksien suhteet
  - ratkaisu tulee määräytyksi vakiotekijää vaille
- Viimeisen tasapainoyhtälön (joka toteutuu automaattisesti) asemesta kirjoitetaan normiehto  $\sum_j \pi_j = 1$ .

Tietokoneella ratkaistaessa on usein mukavampi käyttää seuraavaa menettelyä (yleensä siirtymätodennäköisyysmatriisi  $\mathbf{P}$  on konstruoitu kokonaisuudessaan):

Kirjoitetaan normiehdosta  $\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{e}^T = 1$  kopioita  $n$  kpl:

$$\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{e} \quad \text{missä } \mathbf{E} \text{ on } n \times n\text{-matriisi, jonka kaikki alkiot ovat ykkösiä, } \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Lasketaan tämä yhtälö yhteen tasapainoyhtälön  $\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}$  kanssa  $\Rightarrow \boldsymbol{\pi} \cdot (\mathbf{P} + \mathbf{E} - \mathbf{I}) = \mathbf{e}$

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{P} + \mathbf{E} - \mathbf{I})^{-1}$$

Epähomogeeniyhtälöllä on yksikäsitteinen ratkaisu.

Ratkaisu toteuttaa automaattisesti sekä tasapainoyhtälön että normiehdon.