Markov-prosessit (Jatkuva-aikaiset Markov-ketjut)

Tarkastellaan (stationaarisia) Markov-prosesseja, joiden parametriavaruus on jatkuva (yleensä aika). Siirtymät tilasta toiseen voivat tapahtua mielivaltaisina ajanhetkinä.

- Markov-ominaisuuden vuoksi aika, jonka järjestelmä viettää annetussa tilassa, on muistiton: jäljelläolevan ajan jakauma riippuu vain ko. tilasta, muttei siitä, kauanko tilassa on jo oltu $\Rightarrow$ aika on eksponentiaalisesti jakautunut.

Markov-prosessin X_t määrittelee täydellisesti ns. generaattorimatriisi l. siirtymänopeusmatriisi

$$q_{i,j} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathrm{P}\{X_{t+\Delta t} = j \,|\, X_t = i\}}{\Delta t} \qquad i \neq j$$

- todennäköisyys aikayksikköä kohden siirtyä tilasta i tilaan j

- siirtymänopeus l. siirtymäintensiteetti

Kokonaissiirtymänopeus pois tilasta i on

$$q_i = \sum_{j \neq i} q_{i,j} \qquad | \text{ tilan elinaika} \sim \mathrm{Exp}(q_i)$$

Tällä nopeudella tilan i todennäköisyys pienenee. Määritellään

$$q_{i,i} = -q_i$$

Siirtymänopeusmatriisi ja ajasta riippuva tilatodennäköisyysvektori

Siirtymänopeusmatriisi kokonaisuudessaan on

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_{0,0} & q_{0,1} & \cdots \\ q_{1,0} & q_{1,1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_0 & q_{0,1} & \cdots \\ q_{1,0} & -q_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

rivisummat ovat nollia:
tilasta i poistuva tn.massa siirtyy muualle

Tilatodennäköisyysvektori $\boldsymbol{\pi}(t)$ on nyt ajan funktio, joka kehittyy seuraavasti

$$\boxed{\frac{d}{dt}\boldsymbol{\pi}(t) = \boldsymbol{\pi}(t) \cdot \mathbf{Q}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\pi}(t+\Delta t) = \boldsymbol{\pi}(t) + \boldsymbol{\pi}(t) \cdot \mathbf{Q}\,\Delta t + o(\Delta t) = \boldsymbol{\pi}(t)(\mathbf{I} + \mathbf{Q}\,\Delta t) + o(\Delta t)$$

Siirtymätodennäköisyysmatriisi aikavälin Δt yli on $\mathbf{I} + \mathbf{Q}\,\Delta t$

- lähenee identiteettimatriisia $\mathbf{I}$, kun $\Delta t \to 0$
- $\mathbf{Q}$ on siirtymätodennäköisyysmatriisin aikaderivaatta (siirtymänopeusmatriisi)

Muodollinen ratkaisu ajasta riippuvalle tilatodennäköisyysvektorille on

$$\boxed{\boldsymbol{\pi}(t) = \boldsymbol{\pi}(0) \cdot e^{\mathbf{Q}\,t}}$$

Matriisieksponentti $e^{\mathbf{A}}$ voidaan määritellä

- sarjakehitelmän avulla: $e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 + \cdots$
- ominaisarvojen ja -vektorien avulla: $\mathbf{A}\mathbf{u}_i^{\mathrm{T}} = z_i \mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}$ ja $\mathbf{v}_i \mathbf{A} = z_i \mathbf{v}_i$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A} = \sum_i z_i \mathbf{u}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{v}_i \quad \text{ja} \quad e^{\mathbf{A}} = \sum_i e^{z_i} \mathbf{u}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{v}_i$$

Globaalit tasapainoehdot

Stationaarinen ratkaisu $\boldsymbol{\pi} = \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{\pi}(t)$ on ajasta riippumaton ja siten toteuttaa yhtälön

$$\boxed{\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{0}}$$

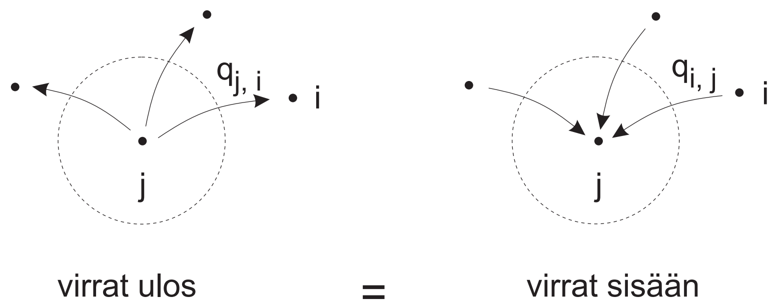
Globaali tasapainoehto, joka ilmoittaa todennäköisyysvirtojen tasapainon.

Yhtälön j:s rivi on

$$\underbrace{q_j}_{\sum_{i\neq j} q_{j,i}} \pi_j = \sum_{i\neq j} \pi_i q_{i,j}$$

$$\boxed{\sum_{i\neq j} \pi_j q_{j,i} = \sum_{i\neq j} \pi_i q_{i,j}}$$

$\pi_i q_{i,j}$ = todennäköisyysvirta tilasta i tilaan j (siirtymäfrekvenssi tilasta i tilaan j)



Globaalit tasapainoehdot (jatkoa)

- Yhtälöt ovat riippuvia: mikä tahansa yhtälöistä on automaattisesti voimassa, jos muut ovat voimassa ("todennäköisyyden häviämättömyys").
- Ratkaisu on määrätty vakiotekijää vaille.
- Ratkaisu tulee yksikäsitteisesti määrätyksi normiehdon kautta.

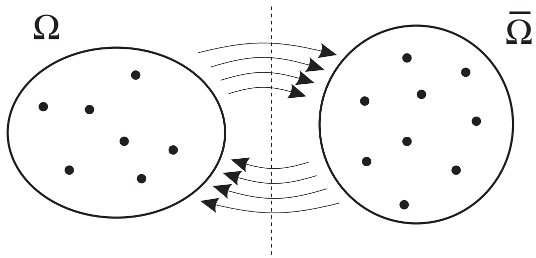
$$\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{e}^{\mathrm{T}} = 1 \quad \text{eli} \quad \sum_j \pi_j = 1$$

- $\boldsymbol{\pi}$ on $\mathbf{Q}$:n ominaisarvoon 0 liittyvä (vasemmanpuoleinen) ominaisvektori.

Globaali tasapainoehto pätee yhtä hyvin myös tilajoukoille.

Stationaarisessa tilassa todennäköisyysvirrat kahteen joukkoon jaettujen tilojen välillä ovat tasapainossa: Olkoot Ω ja $\bar{\Omega}$ komplementaariset tilajoukot. Tällöin

$$\sum_{i\in\Omega, j\in\bar{\Omega}} \pi_j q_{j,i} = \sum_{i\in\Omega, j\in\bar{\Omega}} \pi_i q_{i,j}$$



Tasapainoyhtälön ratkaisemisesta

Samalla tavalla kuin Markovin ketjun tapauksessa (homogeenisen) tasapainoyhtälön

$$\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{0}$$

ratkaisu, joka toteuttaa normiehdon $\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{e}^{\mathrm{T}} = 1$, saadaan kätevästi kirjoittamalla normiehdosta $n+1$ kopiota

$$\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{e}$$

missä $\mathbf{E}$ on $(n+1) \times (n+1)$-matriisi, jonka kaikki alkiot ovat ykkösiä, $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

laskemalla yhtälöt yhteen, $\boldsymbol{\pi} \cdot (\mathbf{Q} + \mathbf{E}) = \mathbf{e}$, ja ratkaisemalla näin saatu epähomogeeninen yhtälö

$$\boxed{\boldsymbol{\pi} = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{Q} + \mathbf{E})^{-1}}$$

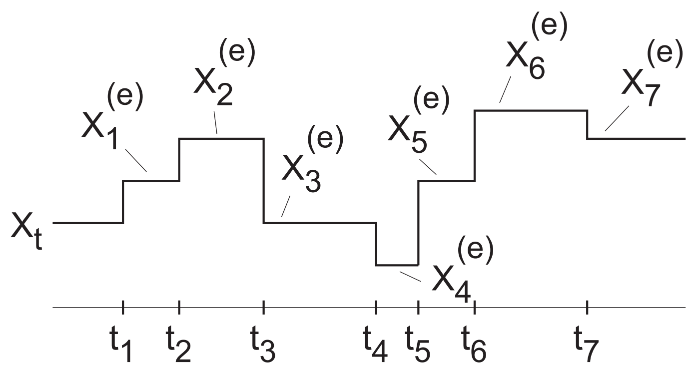
Upotettu Markovin ketju (embedded Markov chain)

Jokaiseen jatkuva-aikaiseen Markovin prosessiin X_t voidaan liitää diskreettiaikainen Markovin ketju, ns. upotettu Markovin ketju $X_n^{(e)}$.

- Huomio kiinnitetään X_t:n tilasiirtymiin (silloin kun ne tapahtuvat) eli X_t:n läpikäymien tilojen jonoon.
- Tapahtukoot X_t:n tilasiirtymät hetkillä $t_0, t_1, \ldots$
- Määritellään $X_n^{(e)}$:n arvoksi X_t:n arvo heti hetkellä t_n tapahtuneen tilasiirtymän jälkeen (hetki t_n^+), eli X_t:n arvo välillä (t_n, t_{n+1}).

$$\boxed{X_n^{(e)} = X_{t_n^+}}$$

Koska X_t on Markov-prosessi, niin näin määritelty jono $X_n^{(e)}$ muodostaa Markovin ketjun.

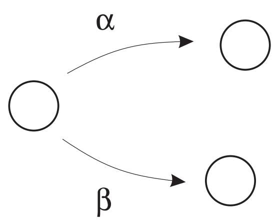


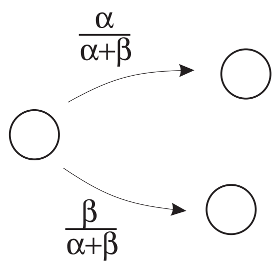
Upotettu Markovin ketju (jatkoa)

Markov-prosessin tilat luokitellaan vastaavasti kuin näin määritellyn Markovin ketjun tilat (transientti, absorboiva, palautuva,...).

Upotetun Markovin ketjun tilasiirtymätodennäköisyydet

$$
\begin{aligned}
p_{i,j} &= \lim_{\Delta t \to 0} \mathrm{P}\{X_{t+\Delta t} = j \,|\, X_{t+\Delta t} \neq i, X_t = i\} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathrm{P}\{X_{t+\Delta t} = j, X_{t+\Delta t} \neq i \,|\, X_t = i\}}{\mathrm{P}\{X_{t+\Delta t} \neq i \,|\, X_t = i\}} \\
&= \begin{cases} \dfrac{q_{i,j}}{\sum_j q_{i,j}} & i \neq j \quad \text{vrt. } \mathrm{P}\{\min(X_1, \ldots, X_n) = X_i\} = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}, \text{ kun } X_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda_i) \\ 0 & i = j \end{cases}
\end{aligned}
$$





Markov-prosessi, siirtymänopeudet $q_{i,j}$
tasapainotodennäköisyydet π_i

Upotettu Markovin ketju, siirtymätodennäköisyydet $p_{i,j}$
tasapainotodennäköisyydet $\pi_i^{(e)}$

Upotetun Markovin ketjun tasapainotodennäköisyydet

$$\boxed{\pi_i = \frac{\pi_i^{(e)} \mathrm{E}[T_i]}{\sum_j \pi_j^{(e)} \mathrm{E}[T_j]}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\pi_i^{(e)} = \frac{\pi_i q_i}{\sum_j \pi_j q_j}} \qquad \mathrm{E}[T_i] = 1/q_i, \qquad q_i = \sum_j q_{i,j}$$

π_i = aikaosuus, jonka X_t viettää tilassa i (paino $\mathrm{E}[T_i]$)

$\pi_i^{(e)}$ = suhtellinen frekvenssi, jolla tila i esiintyy $X_n^{(e)}$:n läpikäymien tilojen jonossa (paino 1)

Huom. $\pi_i q_i$ on frekvenssi, jolla Markovin ketju X_t suorittaa hyppyjä pois tilasta i. Systeemin ollessa tasapainossa tämä on sama kuin frekvenssi, jolla systeemi suorittaa hyppyjä tilaan i.

- Nyt on tarkasteltu kaikkien X_t:n läpikäymien tilojen jonoa $X_n^{(e)}$
- Joskus tästä jonosta voidaan sopivalla tavalla poimia osajono, joka edelleen muodostaa erään upotetun Markovin ketjun.
  - myöhemmin tullaan ns. $M/G/1$-jonosysteemin analyysi perustamaan sopivasti valitun upotetun Markovin ketjun tarkasteluun

Semi-Markov-prosessit

Kääntäen jokaiseen Markovin ketjuun $Z_n,\ n = 1, 2, \ldots$ voidaan liittää jatkuva-aikainen satunnaisprosessi X_t valitsemalla aika T_i, jonka X_t viettää tilassa i jostakin jakaumasta

- joka kerta muista riippumatta
- eri tiloilla jakaumat voivat olla erilaiset

ja arpomalla uusi tila Z_n:n tilasiirtymätodennäköisyyksien mukaisesti.

Näin saatua prosessia X_t kutsutaan semi-Markov-prosessiksi

- ei yleensä ole Markov-prosessi
- on Markov-prosessi silloin ja vain silloin, kun $T_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda_i)$
- sillä on sama stationaarinen jakauma kuin vastaavalla Markovin prosessilla