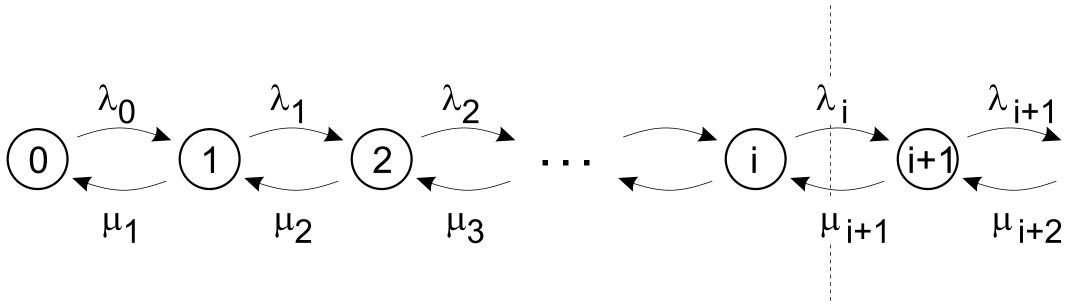
Syntymä-kuolema-prosessit

Yleistä

Syntymä-kuolema-prosessiksi (SK-prosessi) kutsutaan Markov-prosessia, jonka

- tila-avaruus on diskreetti
- tilat voidaan järjestää jonoksi, i=0,1,2,...siten, että
- tilasiirtymiä voi tapahtua vain naapuritilojen välillä, $i \to i+1$ tai $i \to i-1$



Tilasiirtymänopeudet

$$q_{i,j} = \begin{cases} \lambda_i & \text{kun} \quad j = i+1 \\ \mu_i & \text{kun} \quad j = i-1 \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases} \quad \begin{array}{|l} \text{syntymätn. intervallissa } \Delta t \text{ on } \lambda_i \Delta t \\ \text{kuolematn. intervallissa } \Delta t \text{ on } \mu_i \Delta t \\ \text{kun systeemi on tilassa } i \end{array}$$

SK-prosessin tasapainotilatodennäköisyydet

Käytetään leikkausmenetelmää = globaali tasapainoehto sovellettuna tilajoukkoon $0, 1, \ldots, k$.

Tasapainotilassa todennäköisyysvirrat leikkauksen yli kumoavat toisensa (nettovirta =0)

$$\boxed{\lambda_k \pi_k = \mu_{k+1} \pi_{k+1}} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Saadaan rekursiokaava

$$\pi_{k+1} = \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}} \pi_k$$

Kaikki todennäköisyydet voidaan palauttaa rekursion avulla tilan 0 todennäköisyyteen π_0

$$\boxed{\pi_k = \frac{\lambda_{k-1}\lambda_{k-2}\cdots\lambda_0}{\mu_k\mu_{k-1}\cdots\mu_1}\pi_0 = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \pi_0}$$

Soveltamalla normiehtoa $\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1$, voidaan määrätä π_0

$$\boxed{\pi_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2} + \cdots} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}}}$$

SK-prosessin ajasta riippuvat ratkaisut

Edellä tutkittiin SK-prosessin tasapainojakaumaa $\boldsymbol{\pi}$.

Joskus tunnetaan tilatodennäköisyydet hetkellä 0, $\boldsymbol{\pi}(0)$,

- tavallisin tilanne on se, että systeemin tiedetään olevan hetkellä 0 täsmälleen jossakin tilassa k; tällöin $\pi_k(0) = 1$ ja $\pi_j(0) = 0$, kun $j \neq k$

ja halutaan selvittää, miten tilatodennäköisyydet kehittyvät ajan funktiona eli $\boldsymbol{\pi}(t)$

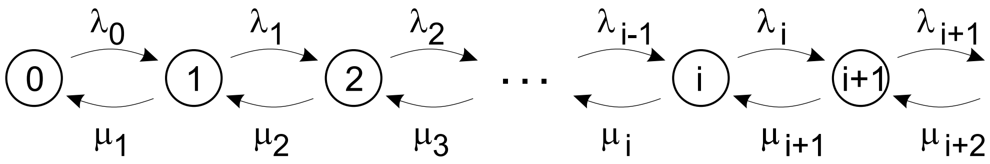
- tiedetään, että $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{\pi}(t) = \boldsymbol{\pi}$.

Tämä määräytyy yhtälöstä

$$\boxed{\frac{d}{dt}\boldsymbol{\pi}(t) = \boldsymbol{\pi}(t) \cdot \mathbf{Q}} \qquad \text{missä}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3+\mu_3) & \lambda_3 \\ \vdots & \vdots & 0 & \mu_4 & -(\lambda_4+\mu_4) \end{pmatrix}$$

SK-prosessin ajasta riippuvat ratkaisut (jatkoa)



Yhtälöt komponettimuodossa

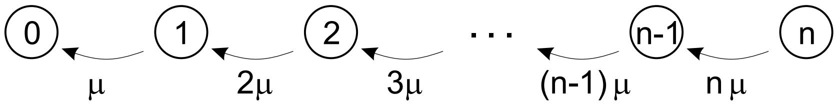
$$
\begin{cases}
\dfrac{d\pi_i(t)}{dt} = \underbrace{-(\lambda_i + \mu_i)\pi_i(t)}_{\text{virrat ulos}} + \underbrace{\lambda_{i-1}\pi_{i-1}(t) + \mu_{i+1}\pi_{i+1}(t)}_{\text{virrat sisään}} \qquad i = 1, 2, \ldots \\
\dfrac{d\pi_0(t)}{dt} = \underbrace{-\lambda_0\pi_0(t)}_{\text{virta ulos}} + \underbrace{\mu_1\pi_1(t)}_{\text{virta sisään}}
\end{cases}
$$

Esim. 1. Puhdas kuolemaprosessi

$$\begin{cases} \lambda_i = 0 \\ \mu_i = i\mu \end{cases} \quad i = 0, 1, 2, \ldots \qquad\qquad \pi_i(0) = \begin{cases} 1 & i = n \\ 0 & i \neq n \end{cases}$$

jokaisella yksilöllä kuolemisnopeus on vakio μ

systeemi lähtee tilasta n



Tila 0 on absorboiva tila, muut tilat ovat transientteja

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\pi_n(t) &= -n\mu\pi_n(t) & \Rightarrow \quad \pi_n(t) = e^{-n\mu t} \\ \frac{d}{dt}\pi_i(t) &= (i+1)\mu\pi_{i+1}(t) - i\mu\pi_i(t) & i = 0, 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{i\mu t}\pi_i(t)) = (i+1)\mu\pi_{i+1}(t)e^{i\mu t} \quad \Rightarrow \quad \pi_i(t) = (i+1)e^{-i\mu t}\mu\int_0^t \pi_{i+1}(t')e^{i\mu t'}dt'$$

$$\pi_{n-1}(t) = ne^{-(n-1)\mu t}\mu\int_0^t \underbrace{e^{-n\mu t'}e^{(n-1)\mu t'}}_{e^{-\mu t'}}dt' = n\,e^{-(n-1)\mu t}(1 - e^{-\mu t})$$

Rekursiivisesti $\boxed{\pi_i(t) = \binom{n}{i}(e^{-\mu t})^i(1 - e^{-\mu t})^{n-i}}$

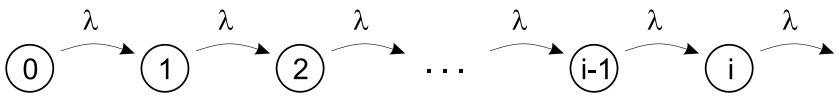
Binomijakauma: jokainen on muista riippumatta hetkellä t elossa tn:llä $e^{-\mu t}$

Esim. 2. Puhdas syntymäprosessi (Poisson-prosessi)

$$\begin{cases} \lambda_i = \lambda \\ \mu_i = 0 \end{cases} \quad i = 0, 1, 2, \ldots \qquad \pi_i(0) = \begin{cases} 1 & i = 0 \\ 0 & i > 0 \end{cases}$$

syntymätodennäköisyys aikayksikköä kohden on vakio λ

alkuhetkellä populaatio on 0



Kaikki tilat ovat transientteja

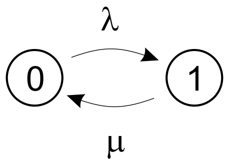
$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\,\pi_i(t) &= -\lambda\pi_i(t) + \lambda\pi_{i-1}(t) \qquad i > 0 \\ \frac{d}{dt}\,\pi_0(t) &= -\lambda\pi_0(t) \qquad \Rightarrow \quad \pi_0(t) = e^{-\lambda t} \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}\pi_i(t)) \;=\; \lambda\pi_{i-1}(t)e^{\lambda t} \qquad \Rightarrow \qquad \pi_i(t) \;=\; e^{-\lambda t}\lambda \int_0^t \pi_{i-1}(t')e^{\lambda t'}dt'$$

$$\pi_1(t) \;=\; e^{-\lambda t}\lambda \int_0^t \underbrace{e^{-\lambda t'}e^{\lambda t'}}_{1}dt' \;=\; e^{-\lambda t}(\lambda t)$$

Rekursiivisesti $\boxed{\pi_i(t) = \dfrac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t}}$ Syntymien lkm välillä $(0, t) \sim$ Poisson(λt)

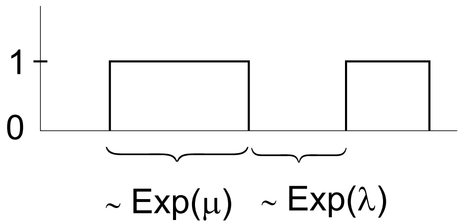
Esim. 3. Yhden palvelimen järjestelmä



- vakio saapumisnopeus λ (Poisson-saapumiset)
- palvelun päättymisnopeus μ (eksp. palveluaikajak.)

Järjestelmän tilat

$$\begin{cases} 0 & \text{palvelin vapaa} \\ 1 & \text{palvelin käytössä} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\pi_0(t) = -\lambda\pi_0(t) + \mu\pi_1(t) \\ \frac{d}{dt}\pi_1(t) = \lambda\pi_0(t) - \mu\pi_1(t) \end{cases} \qquad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

Lasketaan yhtälöt yhteen

$$\frac{d}{dt}(\pi_0(t) + \pi_1(t)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi_0(t) + \pi_1(t) = \text{vakio} = 1 \quad \Rightarrow \quad \pi_1(t) = 1 - \pi_0(t)$$

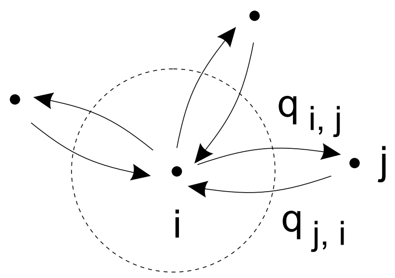
$$\frac{d}{dt}\pi_0(t) + (\lambda+\mu)\pi_0(t) = \mu \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(e^{(\lambda+\mu)t}\pi_0(t)) = \mu e^{(\lambda+\mu)t}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \pi_0(t) &= \frac{\mu}{\lambda+\mu} + (\pi_0(0) - \frac{\mu}{\lambda+\mu})e^{-(\lambda+\mu)t} \\ \pi_1(t) &= \underbrace{\frac{\lambda}{\lambda+\mu}}_{\text{tasapaino-jakauma}} + \underbrace{(\pi_1(0) - \frac{\lambda}{\lambda+\mu})}_{\text{poikkeama tasapainosta}}\underbrace{e^{-(\lambda+\mu)t}}_{\text{häviää eksponentiaalisesti}} \end{aligned}}$$

Markov-järjestelmien analyysi: yhteenveto

1. Etsi järjestelmälle tilakuvaus
   - tähän ei ole valmista reseptiä
   - usein sopiva tilakuvaus on ilmeinen
   - joskus vaatii enemmän ajattelua
   - systeemi voi olla markovinen jonkin tilakuvauksen suhteen ja ei-markovinen jonkin toisen tilakuvauksen suhteen (jolloin tila-informaatio ei ole riittävä)
   - tilakuvauksen löytäminen on ongelman luova osa
2. Määrää tilasiirtymänopeudet
   - suoraviivainen tehtävä, kun eksponentiaaliset pitoajat ja saapumisväliajat
3. Ratkaise tasapainoyhtälöt
   - periaatteessa suoraviivainen tehtävä (lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisu)
   - tuntemattomien määrä (tilojen lukumäärä) voi olla hyvin suuri
   - usein voidaan hyödyntää tilakaavion erityispiirteitä

Globaali tasapainoehto



$n+1$ tilaa

$$\underbrace{\boxed{\sum_{j\neq i}\pi_j q_{j,i}}}_{\text{virta tilaan } i} = \underbrace{\boxed{\sum_{j\neq i}\pi_i q_{i,j}}}_{\text{virta tilasta } i}$$

$i = 0, 1, \ldots, n$
yksi yhtälö kutakin tilaa kohden

$$\overbrace{(\pi_0,\ldots,\pi_n)}^{\boldsymbol{\pi}}\overbrace{\begin{pmatrix} -\sum_j q_{0,j} & q_{0,1} & q_{0,2} & \cdots & q_{0,n} \\ q_{1,0} & -\sum_j q_{1,j} & q_{1,2} & \cdots & q_{1,n} \\ q_{2,0} & q_{2,1} & -\sum_j q_{2,j} & \cdots & q_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n,0} & q_{n,1}, & q_{n,2}, & \cdots & -\sum_j q_{n,j} \end{pmatrix}}^{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

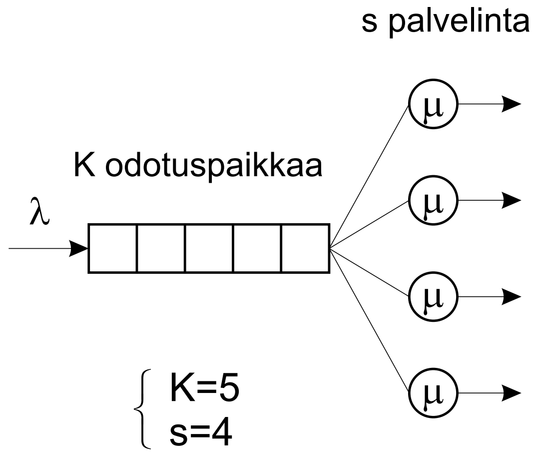
$$\boxed{\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{Q} = \mathbf{0}}$$

yksi yhtälö on redundantti

$$\boxed{\pi_0 + \pi_1 + \cdots + \pi_n = 1}$$

normiehto

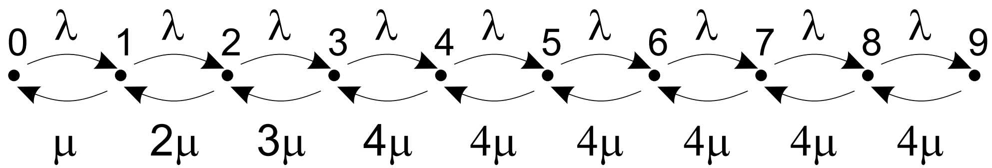
Esim. 1. Jonojärjestelmä



$$\begin{cases} s & \text{palvelinta} \\ K & \text{odotuspaikkaa} \\ \lambda & \text{saapumisnopeus (Poisson)} \\ \mu & \text{Exp}(\mu) \text{ pitoaika (odostusarvo } 1/\mu) \end{cases}$$

Asiakkaiden lukumäärä N kelpaa tilamuuttujaksi

- määrää yksikäsitteisesti palvelussa olevien ja odottavien asiakkaiden lukumäärät
- minkä tahansa saapumisen tai poistumisen jälkeen palveltavana olevien asiakkaiden jäljelläolevat palveluajat ovat Exp(μ)-jakautuneita (muistittomuus)

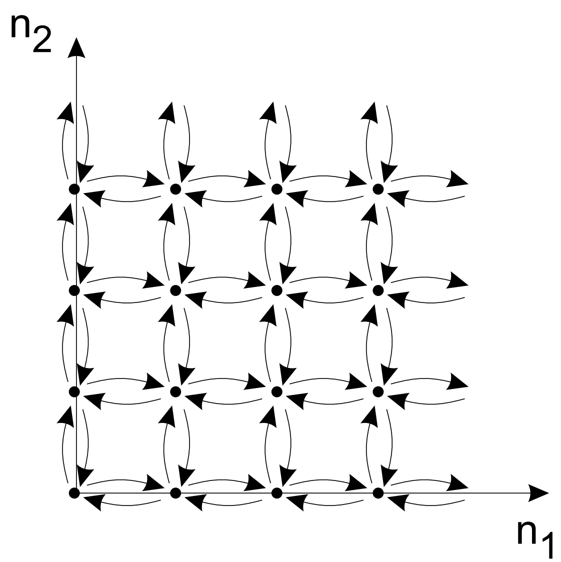


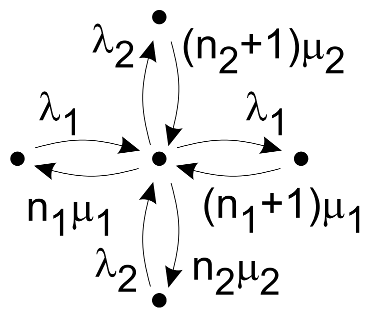
Esim. 2. Kutsuesto ATM-verkossa

ATM-verkon virtuaaliväylälle (VP) tarjotaan kahdenlaisia kutsuja.

$$\begin{cases} R_1 = 1\text{Mbps} \\ \lambda_1 = \text{saapumisnopeus} \\ \mu_1 = \text{keskim. pitoaika} \end{cases} \qquad \begin{cases} R_2 = 2\text{Mbps} \\ \lambda_2 = \text{saapumisnopeus} \\ \mu_2 = \text{keskim. pitoaika} \end{cases}$$

a) Väylän kapasiteetti on suuri (ääretön)





Markov-prosessin tilamuuttujana on tässä esimerkissä pari (N_1, N_2), missä N_i kertoo päälläolevien, luokkaan i kuuluvien kutsujen lukumäärän tarkasteluhetkellä.

Kutsuesto ATM-verkossa (jatkoa)

b) Väylän kapasiteetti on 4.5 Mbps