

*Huom.* Tehtävä 3 on kotitehtävä, jonka mallivastaus käydään läpi vasta seuraavissa laskuharjoituksissa. Palauta vastauksesi ennen seuraavia harjoituksia (22.3.) teletekniikan labran ilmoitustaulun alla olevaan kurssin lokeroon, tai suoraan assistentille harjoituksiin 22.3.

1. Olkoon pisteprosessi  $\tau_n$  Poisson-prosessi intensiteettinä  $\lambda > 0$ , ts. väliajat  $\tau_n - \tau_{n-1}$  ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita:  $\tau_n - \tau_{n-1} \sim \text{Exp}(\lambda)$ . Merkitään  $A(t)$ :llä vastaavaa laskuriprosessia:  $A(0) = 0$  ja  $A(t) = \max\{n = 0, 1, 2, \dots \mid \tau_n \leq t\}$ , kun  $t > 0$ . Osoita (vetoamatta luennoilla esitettyyn Määritelmään 3), että
  - a)  $P\{A(t) = 0\} = e^{-\lambda t}$  ja
  - b)  $P\{A(t) = 1\} = \lambda t e^{-\lambda t}$ .

(*Ohje:* Laske ensin todennäköisyydet  $P\{A(t) \geq 0\}$ ,  $P\{A(t) \geq 1\}$  ja  $P\{A(t) \geq 2\}$ . Näistä kaksi ensimmäistä ovat helppoja ja kolmannessa voidaan hyödyntää edellisen harjoituksen tehtävän 1 tulosta.)
2. Tarkastellaan seuraavia kolmitilaisia Markov-prosesseja (tila-avaruutena joukko  $S = \{0, 1, 2\}$ ). Prosessit on määritelty kertomalla, milloin eri tilasiirtymäintensiteetit  $q_{ij}$ ,  $i, j \in S$ , ovat nollia (0) ja milloin ne ovat positiivisia (+).

$(i, j)$	(0,1)	(0,2)	(1,0)	(1,2)	(2,0)	(2,1)
a)	0	+	+	0	0	+
b)	0	+	+	+	+	+
c)	0	0	+	0	0	+
d)	0	+	0	+	+	+
e)	0	+	0	0	0	+
f)	+	+	+	+	+	+

Piirrä eri prosessien tilasiirtymäkaaviot. Mitkä näistä prosesseista ovat pelkistymättömiä?

3. *Kotitehtävä (palautus 22.3.):* Jatketaan edellisessä tehtävässä esitettyjen prosessien tarkastelua. Tarkennamme prosessien määrittelyä antamalla tarkat siirtymäintensiteetit  $q_{ij}$  alla olevassa taulukossa.

$(i, j)$	(0,1)	(0,2)	(1,0)	(1,2)	(2,0)	(2,1)
a)	0	2	2	0	0	1
b)	0	2	2	1	1	1
c)	0	0	2	0	0	1
d)	0	2	0	1	1	1
e)	0	2	0	0	0	1
f)	1	2	2	1	1	1

- a) Mitkä näistä prosesseista ovat pelkistymättömiä ja positiivisesti palautuvia (ts. millä niistä on tasapainojakauma)? Laske positiivisesti palautuvien prosessien tasapainojakauma.
- b) Mitkä positiivisesti palautuvista prosesseista ovat kääntyviä (ts. mitkä niistä toteuttavat ns. lokaalit tasapainoehdot)?