TEKNILLINEN KORKEAKOULU | **Laskuharjoitus 13**
Teletekniikan laboratorio | 3.5.2000
S-38.145 Liikenneteorian perusteet, Kevät 2000 | Aalto/Nyberg

Huom. Kaikki tehtävät 1-3 ovat ns. *rästitehtäviä*, joilla voi paikata puuttuvia laskuharjoituspisteitä. Palauta vastauksesi *viimeistään keskiviikkoona 10.5.* teletekniikan labran ilmoitustaulun alla olevaan kurssin lokeroon.

1. Tarkastellaan yhden palvelijan jonosysteemiä, johon asiakkaat saapuvat Poisson-prosessin mukaisesti intensiteetillä λ. Kaikkia asiakkaita ei kuitenkaan huolita systeemiin, vaan asiakas pääsee sisään (systeemin tilasta n riippuvalla) todennäköisyydellä $1/(n+1)$ ja siis hylätään todennäköisyydellä $n/(n+1)$ (*discouraged arrivals*). Merkitään $X(t)$:llä systeemissä olevien asiakkaiden lkm:ää (eli systeemin tilaa) hetkellä t. Prosessi $X(t)$ on Markov-prosessi.

   (a) Piirrä prosessin $X(t)$ tilasiirtymäkaavio.

   (b) Millä ehdolla systeemi on stabiili, ts. sillä on tasapainojakauma? Johda (tässä tilanteessa) prosessin $X(t)$ tasapainojakauma. Mikä on keskimääräinen systeemissä olevien asiakkaiden lukumäärä tasapainotilanteessa?

2. Tarkastellaan jonojärjestelmää, jossa on n palvelinta ja m odotuspaikkaa. Asiakkaiden palveluajat oletetaan toisistaan riippumattomiksi ja samoin jakautuneiksi odotusarvonaan $1/\mu$. Jos systeemi on täysi asiakkaan saapuessa, ko. asiakas menetetään.

   (a) Oletetaan ensin, että systeemi on aina täysi: hetkellä 0 systeemissä on $n+m$ asiakasta ja aina kun yksi asiakas poistuu palvelusta uusi asiakas saapuu välittömästi systeemiin. Kuinka kauan yksittäinen asiakas keskimäärin viettää systeemissä?

   (b) Oletetaan sitten, että asiakkaat saapuvat Poisson-prosessin mukaisesti intensiteetillä λ. Osoita, että asiakkaan menetystodennäköisyydelle p_L pätee epäyhtälö

$$p_L \geq 1 - \frac{n\mu}{\lambda}.$$

   Ohje: Määritä ensin palvelimien muodostaman systeemin keskimääräinen miehitys!

3. (Batch means -menetelmä) Simuloi tapahtumapohjaisesti M/M/1-FIFO-jonon (parametrein $\lambda = 1/2$ ja $\mu = 1$) jononpituuden $Q(t)$ kehitystä hetkestä 0 hetkeen $T = 101000$ olettaen, että systeemi on alussa tyhjä, $Q(0) = 0$. Tee vain yksi simulointiajo. Laske tässä ajossa keskimääräinen jononpituus X_m aikavälillä $[T_0 + (m-1)\Delta, T_0 + m\Delta]$, missä $T_0 = \Delta = 1000$. Näin saat $n = 100$ havaintoa $X_1, X_2, \ldots, X_n$ keskimääräisestä jonopituudesta (likimain tasapainotilanteessa).

   (a) Tulosta näistä havainnoista lasketut keskiarvot $\bar{X}_m$, $m = 10, 20, \ldots, 100$.

   (b) Tulosta lisäksi näistä havainnoista lasketut otoshajonnat S_m, $m = 10, 20, \ldots, 100$.

   (c) Laske ja tulosta lopuksi havaintojen keskiarvojen $\bar{X}_m$, $m = 10, 20, \ldots, 100$, luottamusvälit 95%:n luottamustasolla olettaen, että havainnot ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita noudattaen normaalijakaumaa, jonka varianssi on kuitenkin tuntematon. (Osa tarvittavista Studentin t-jakauman fraktiileista löytyy tehtäväpaperin kääntöpuolelta; puuttuvat on helppo interpoloida.)

n	$t_{n,0.975}$
1	12.7
2	4.30
3	3.18
4	2.78
5	2.57
6	2.45
7	2.37
8	2.31
9	2.26
10	2.23
19	2.09
20	2.09
30	2.04
40	2.02
50	2.01
100	1.98
∞	1.96

Taulukko 1: Student(n)-jakauman fraktiili $t_{n,0.975}$.