



3. Esimerkkejä eri järjestelmien mallintamisesta (osa 2)

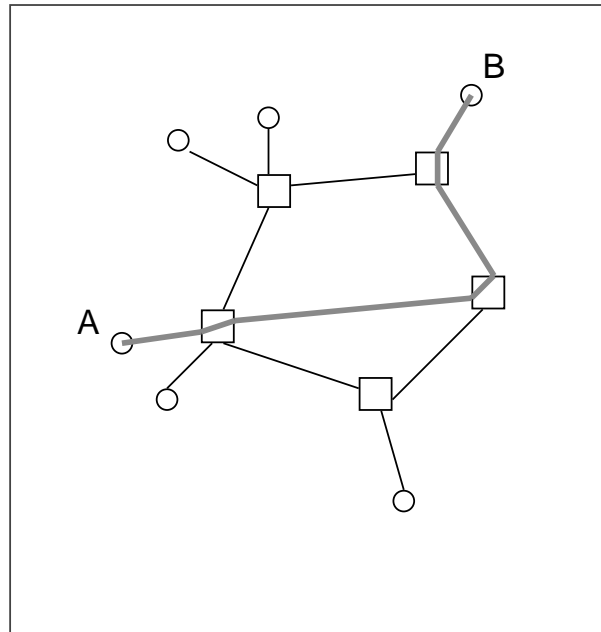
3. Esimerkkejä eri järjestelmien mallintamisesta (osa 2)

Sisältö

- Piirikytkentäisen verkon mallinnus estoverkkona
- Pakettikytkentäisen verkon mallinnus jonoverkkona

Piirikytkentäisen verkon malli (1)

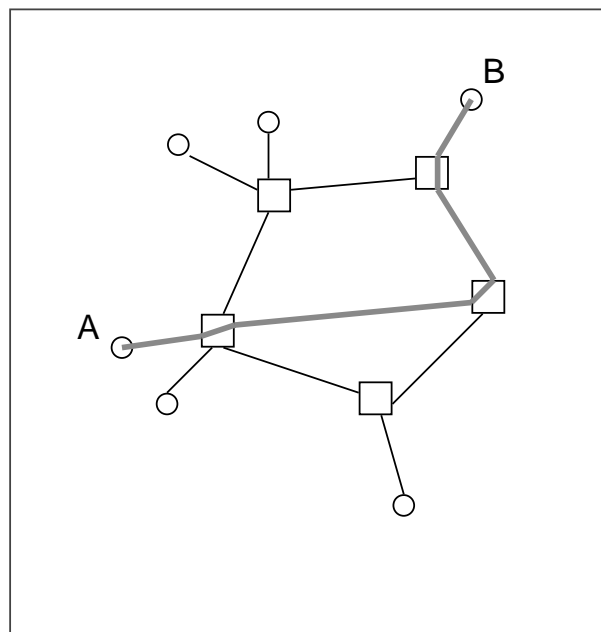
- Tarkastellaan piirikytkentäistä verkkoa (esim. puhelinverkko)
- Liikenne:
 - Asiakkaita ovat saapuvat yhteyspyynnöt. Liikenne muodostuu järjestelmään päässeistä kutsuista (puheluista), jotka varaavat yhden kanavan per linkki.
- Järjestelmä:
 - päätelaitteet (puhelimet)
 - niitä verkkoon yhdistävät linkit (tilaajajohdot)
 - verkon solmut (keskukset)
 - niiden väliset linkit (keskusten väliset yhdysjohdot)



3

Piirikytkentäisen verkon malli (2)

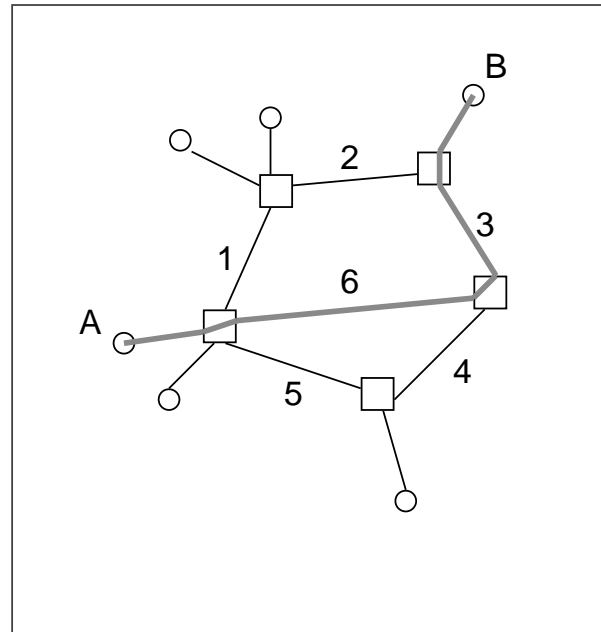
- Palvelun laatu:
 - Palvelun laatua kuvaa tn, millä haluttua yhteyttä ei pystytä muodostamaan (verkon rajallisista resursseista johtuen). Tätä sanotaan **päästä-päähän estoksi** (end-to-end blocking).
- Mallissa oletetaan, että
 - kaikki verkon solmut ja koko liityntäverkko ovat estottomia
- Näin ollen, kutsu estyy
 - täsmälleen silloin, kun kutsun saapuessa vähintään yksi kutsun reittiin kuuluva runkoverkon linkki on täysi (so. kaikki kanavat varattuina)



4

Linkit $j = 1, \dots, J$

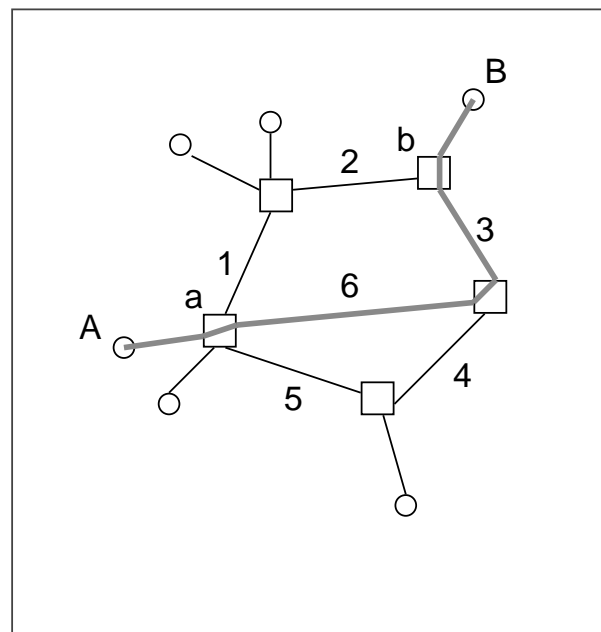
- Mallissa oletetaan, että
 - kaikki linkit ovat **kaksi-suuntaisia** (miksi?)
- Merk. J :llä runkoverkon linkkien lkm:ää, ja indeksoidaan niitä j :llä:
 - $j = 1, \dots, J$
 - kuvassa: $J = 6$
- Merk. n_j :llä linkin j kapasiteettia (rinnakkaisten kanavien lkm)
 - $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_J)$
- Yksittäiset linkit mallinnetaan **puhtaina menetysjärjestelminä**



5

Reitit $r = 1, \dots, R$

- Määr. **reitti** joukoksi linkejä, jotka yhdistävät kaksi runkoverkon solmua toisiinsa.
- Merk. R :llä eri reittien lkm:ää, ja indeksoidaan niitä r :llä:
 - $r = 1, \dots, R$
 - kuvassa:
 $R = 12 + 10 + 7 + 3 = 32$
 - esim. verkon solmujen a ja b välillä on kolme eri reittiä:
 $\{1,2\}, \{6,3\}, \{5,4,3\}$
- Merk. $d_{jr} = 1$, jos linkki j kuuluu reitille r (muuten $d_{jr} = 0$)
 - $\mathbf{D} = (d_{jr} \mid j = 1, \dots, J; r = 1, \dots, R)$



6

Yhteysluokat ja verkon tila

- Oletetaan sitten, että
 - yhteydet reititetään aina samalla tavalla läpi verkon
 - tätä kutsutaan **kiinteäksi reititykseksi** (fixed routing)
 - ed. kalvon kuvassa: käyttäjien A ja B väliseksi reitiksi on valittu {6,3}.
- Näin ollen
 - kaikki samaa reittiä noudattavat yhteydet kokevat saman päästä-päähän eston.
- Reitti siis määrää yhteyspyynnön **luokan** (class)
 - ed. kalvon kuvassa: esim. käyttäjien A ja B välinen yhteys kuuluu reittiä {6,3} vastaavaan luokkaan
- Merkitään x_r :llä reittiä r noudattavien yhteyksien lkm:ää
 - $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_R)$
- Vektoria \mathbf{x} kutsutaan verkon **tilaksi** (state)

7

Tila-avaruus S

- Reitillä olevien linkkien kapasiteetti asettaa seuraavan ylärajan yhtäaikaisten yhteyksien lkm:lle (kaikilla linkeillä j):

$$\sum_{r=1}^R d_{jr} x_r \leq n_j \quad \text{kaikilla } j$$

- Sama vektorimuodossa:

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{n}$$

- Mahdollisten tilojen joukko eli **tila-avaruus** S (state space) on siten

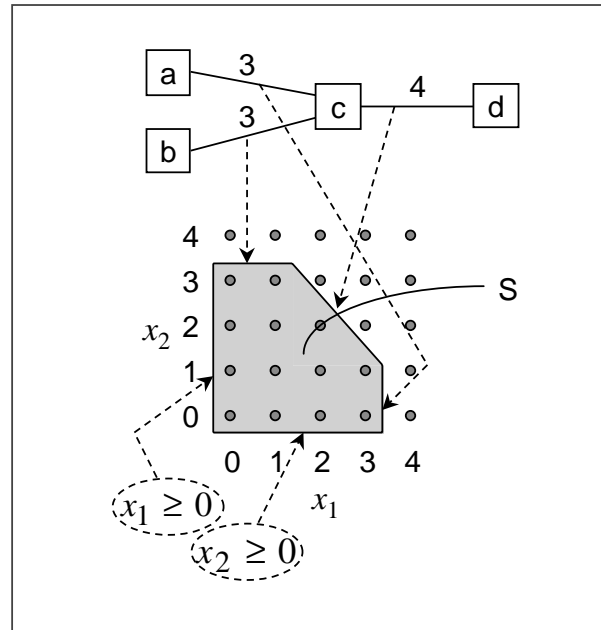
$$S = \{\mathbf{x} \geq 0 \mid \mathbf{D} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{n}\}$$

- Huom. Tila-avaruus on R-ulotteinen ja äärellinen (miksi?)

8

Esimerkki

- 3 linkkiä kapasiteetein:
 - linkki a-c: 3 kanavaa
 - linkki b-c: 3 kanavaa
 - linkki c-d: 4 kanavaa
- 2 reittiä:
 - reitti a-c-d
 - reitti b-c-d
 - Huom. muut 4 reittiä (mitkä?)
sivuutetaan tässä esimerkissä
- Tila-avaruus:
 - $S = \{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,0), (2,1), (2,2), (2,3), (3,0), (3,1)\}$



9

Luokkakohtaiset estottomat tilat S_r

- Tarkastellaan
 - luokkaan r kuuluvaa (so. reitille r tarjottua) yhteyspyyntöä
- **Se ei esty**, jos
 - kaikilla ko. reitin varrella olevilla linkeillä j on ainakin yksi vapaa kanava:

$$\sum_{r'=1}^R d_{jr'} x_{r'} \leq n_j - 1 \quad \text{kaikilla } j \in r$$

- Sama vektorimuodossa (\mathbf{e}_r on yksikkövektori suuntaan r):

$$\mathbf{D} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{e}_r) \leq \mathbf{n}$$

- Luokan r **estottomien tilojen joukko** S_r (non-blocking states) on siten

$$S_r = \{\mathbf{x} \geq 0 \mid \mathbf{D} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{e}_r) \leq \mathbf{n}\}$$

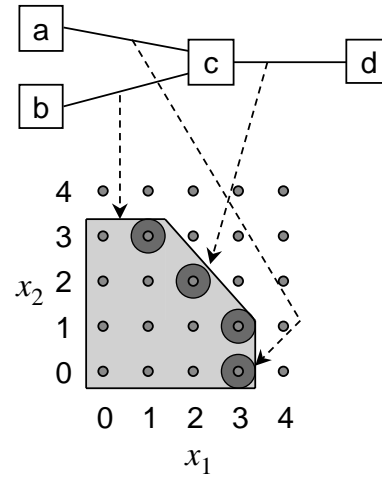
10

Luokakohtaiset estotilat S_r^B

- Luokan r **estotilojen joukko** S_r^B (blocking states) on selvästikin:

$$S_r^B = S \setminus S_r$$

- Jos siis systeemi on jossakin näistä estotiloista uuden, luokkaan r kuuluvan yhteyspyynnön saapuessa, ko. yhteyspyyntö estyy eikä yhteyttä synny.
- Esimerkki (jatkoa):
 - Luokan 1 (siis reittiä a-c-d käyttävien) kutsujen estotilat S_1^B on merkitty kuvaan.
 - $S_1^B = \{ (1,3), (2,2), (3,1), (3,0) \}$



11

Tilatodennäköisyydet (1)

- Oletetaan, että
 - kullekin reitille r tulee uusia yhteyspyyntöjä (muista reiteistä riippumattoman) Poisson-prosessin mukaisesti intensiteetillä λ_r ,
 - kaikkien yhteyksien pitoajat ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita keskiarvonaan h
- Merkitään a_r :llä luokan r liikenneintensiteettiä:
 - $a_r = \lambda_r h$

12

Tilatodennäköisyydet (2)

- Tällöin voidaan osoittaa, että (minkä tahansa) tilan $\mathbf{x} \in S$ todennäköisyys $\pi(\mathbf{x})$ on ns. tasapainotilanteessa (steady state)

$$\pi(\mathbf{x}) = G^{-1} \cdot \prod_{r=1}^R f_r(x_r)$$

missä G on ns. normeerausvakio (normalizing constant)

$$G = \sum_{\mathbf{x} \in S} \prod_{r=1}^R f_r(x_r)$$

ja funktiot $f_r(x_r)$ määritellään kaavalla

$$f_r(x_r) = \frac{a_r^{x_r}}{x_r!}$$

Tilatodennäköisyydet (3)

- Tilatodennäköisyyttä $\pi(\mathbf{x})$ sanotaan **tulomuotoiseksi** (product-form)
 - Kyseessä **ei** kuitenkaan ole eri luokkiin kuuluvien yhteyksien lkm:ien **riippumattomuus**, vaan niitä "sitoo" normeerausvakio G (joka puolestaan riippuu yhtäaikaan kaikkien luokkien tiloista).
 - Perimmäinen syy eri luokkien riippuvuuksille on äärellisten resurssien jakaminen.
 - Jos resurssit olisivat äärettömät (ts. kaikilla linkeillä olisi riittävästi kapasiteettia), eri luokat olisivat toisistaan riippumattomia.

PASTA

- Tarkastellaan, hetken ajan,
 - mitä tahansa yksinkertaista liikenneteoreettista mallia (kts. luennon 1 kalvo 17), johon asiakkaat saapuvat Poisson-prosessin mukaisesti
- Niin sanotun **PASTA**-ominaisuuden (Poisson Arrivals See Time Averages) mukaan,
 - saapuvat asiakkaat (jotka siis noudattavat Poisson-prosessia) näkevät systeemin tasapainotilanteessa
- Tämä on tärkeä havainto
 - sovellettavissa monessa tilanteessa
- Sitä voidaan esimerkiksi käyttää
 - päästä-päähän eston laskemiseen edellä esitettyssä piirikytkentäisen verkon mallissa, jossa oletettiin uusien kutsujen saapuvan Poisson-prosessin mukaisesti

15

Päästä-päähän eston laskenta: tarkka kaava

- Todennäköisyys, että systeemi on (tasapainotilanteessa) luokkaan r liittyvässä estotilassa on selvästikin

$$\sum_{\mathbf{x} \in S_r^B} \pi(\mathbf{x})$$

- Tällaista tn:ttä sanotaan luokan r päästä-päähän **aikaestoksi** (time blocking).
- PASTA-ominaisuuden nojalla taas voidaan päätellä, että
 - luokkaan r kuuluvien yhteyksien kokema päästä-päähän **kutsuesto** (call blocking) saadaan täsmälleen samalla kaavalla:

$$B_r = \sum_{\mathbf{x} \in S_r^B} \pi(\mathbf{x})$$

- Huom. Tässä tilanteessa siis päästä-päähän aika- ja kutsuestot ovat samoja, ja voidaan lyhyesti puhua päästä-päähän estosta.

16

Esimerkki

- Jatketaan kalvoilla 9 ja 11 esitetyn esimerkin tarkastelua
- Luokan 1 päästä-päähän estoksi B_1 tulee

$$B_1 = \pi(1,3) + \pi(2,2) + \pi(3,0) + \pi(3,1) =$$

$$\frac{a_1^1 a_2^3}{1!3!} + \frac{a_1^2 a_2^2}{2!2!} + \frac{a_1^3}{3!} \left(1 + \frac{a_2^1}{1!} \right)$$

$$\left(1 + \frac{a_2^1}{1!} + \frac{a_2^2}{2!} + \frac{a_2^3}{3!} \right) + \frac{a_1^1}{1!} \left(1 + \frac{a_2^1}{1!} + \frac{a_2^2}{2!} + \frac{a_2^3}{3!} \right) + \frac{a_1^2}{2!} \left(1 + \frac{a_2^1}{1!} + \frac{a_2^2}{2!} \right) + \frac{a_1^3}{3!} \left(1 + \frac{a_2^1}{1!} \right)$$

Approksimatiivisia menetelmiä

- Käytännössä edellä esitetyn **tarkan** kaavan soveltaminen on äärimmäisen vaikeaa, jopa mahdotonta, sillä
 - verkon kasvaessa tila-avaruus S suorastaan "räjähtää"
 - selitys: jokainen uusi reittivaihtoehto tuo tila-avaruuteen uuden ulottuvuuden \Rightarrow tila-avaruus kasvaa eksponentiaalista vauhtia
- Sen vuoksi onkin kehitetty erilaisia **approksimatiivisia** menetelmiä päästä-päähän eston laskemiseksi, esim.
 - yksinkertainen **tulorajamenetelmä** (product bound)
 - monimutkaisempi **vähennetyin kuorman menetelmä** (reduced load approximation, Erlang fixed point approximation)
- Kummassakin menetelmässä pyritään
 - ensin arvioimaan linkkikohtaiset estot (jotka ovat samoja kaikille samassa linkissä kulkeville yhteysluokille)
 - ja sen jälkeen päästä-päähän estot olettaen, että yhteyden estyminen tapahtuu eri linkeissä toisistaan riippumatta.

Tulorajamenetelmä (1)

- Tarkastellaan ensin estoa $B(j)$ yksittäisessä linkissä j
 - Merkitään $R(j)$:llä niiden reittien r joukkoa, jotka kulkevat linkin j kautta
- Jos verkon kaikkien **muiden linkkien** kapasiteetti olisi ääretön,
 - **ko. linkki** voitaisiin mallintaa puhtaana estojärjestelmänä, johon saapuu asiakkaita Poisson-prosessin mukaisesti intensiteetillä $\lambda(j)$, missä

$$\lambda(j) = \sum_{r \in R(j)} \lambda_r$$

- Tässä tapauksessa esto voitaisiin laskea Erlangin kaavasta:

$$B(j) \approx \text{Erl}(n_j, \sum_{r \in R(j)} a_r)$$

- Kyseessä on tosiaan approksimaatio, sillä todellisuudessa linkille j tarjottu liikenne tulee muiden linkkien aiheuttamien estojen vuoksi olemaan tätä pienempi (eikä edes Poisson-tyyppistä).

19

Tulorajamenetelmä (2)

- Arvioidaan sitten luokan r kokemaa päästä-päähän estoa B_r
 - Merkitään $J(r)$:llä niiden linkkien joukkoa, joitten kautta reitti r kulkee
 - Huom. luokkaan r kuuluva saapuva kutsu estyy täsmälleen silloin, kun se estyy yhdessäkin linkissä $j \in J(r)$
- Jos eri linkit aiheuttaisivat estoa toisistaan riippumatta (mikä myöskään ei ainakaan tarkkaan ottaen voi pitää paikkaansa),
 - luokkaan r kuuluva saapuva kutsu estyisi todennäköisyydellä

$$B_r \approx 1 - \prod_{j \in J(r)} (1 - B(j))$$

- Huom. Jos $B(j)$:t ovat (hyvin) pieniä, voimme käyttää summakaavaa:

$$B_r \approx \sum_{j \in J(r)} B(j)$$

20

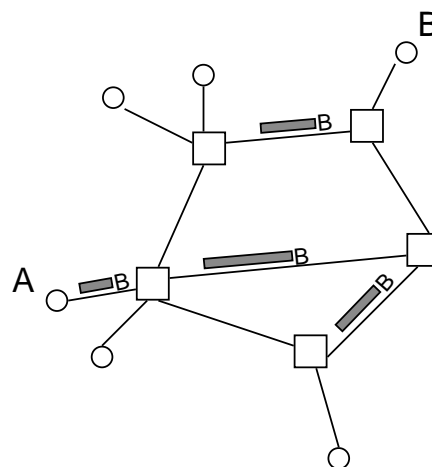
Sisältö

- Piirikytkentäisen verkon mallinnus estoverkkona
- Pakettikytkentäisen verkon mallinnus jonoverkkona

21

Pakettikytkentäisen verkon malli (1)

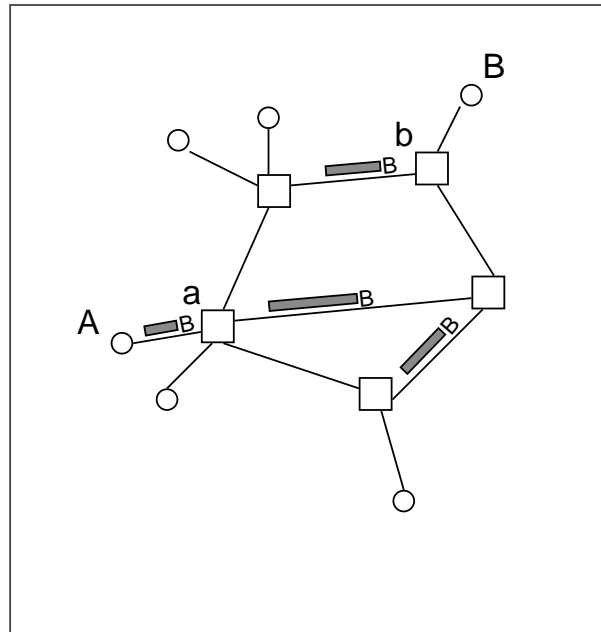
- Tarkastellaan pakettikytkentäistä verkkoa (esim. Internet-verkon jotain osaa)
- Liikenne:
 - Liikenne muodostuu verkossa liikkuvista paketeista, joilla on aina lähtöpiste (kuvassa: A) ja määränpää (kuvassa: B). Paketit kilpailevat verkon resursseista jonotusperiaatteella.
- Järjestelmä:
 - päätelaitteet (verkossa olevat työasemat ja palvelimet)
 - niitä verkkoon yhdistävät linkit
 - verkon solmut (reitittimet)
 - niiden väliset linkit



22

Pakettikytkentäisen verkon malli (2)

- **Palvelun laatu:**
 - Palvelun laatua kuvaa esim. paketin kokema keskimääräinen viive. Tätä sanotaan **päästä-päähän viiveeksi** (end-to-end delay).
- Rajoitetaan kuitenkin tarkastelu
 - **runkoverkon aiheuttamaan viiveeseen**
 - kuvassa: paketin kokema viive matkalla reitittimen a sisään-tulosta reitittimen b ulosmenoon
 - implisiittisesti siis oletetaan, että liityntäverkon aiheuttama viive (tai oikeammin: viiveenvaihtelu) on vähäinen



23

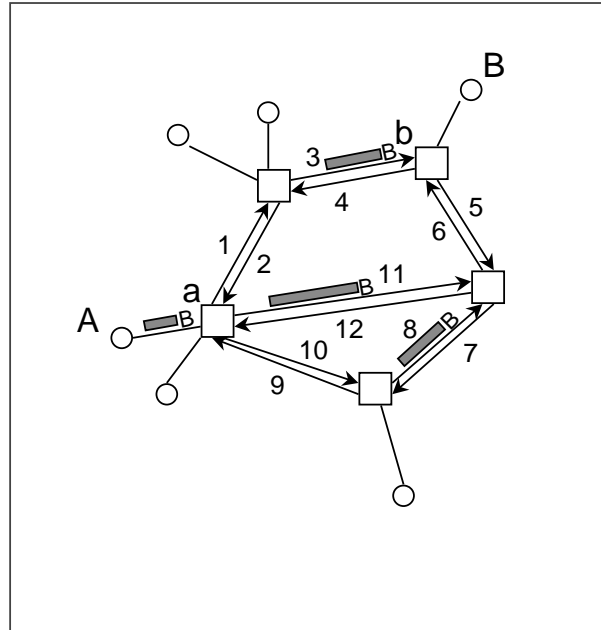
Päästä-päähän viiveen komponentit

- Runkoverkon aiheuttama viive jakaantuu
 - signaalin etenemisviiveeksi (propagation delay) linkeillä
 - lähetysviiveeksi (transmission delay) linkeillä
 - prosessointiviiveiksi (processing delay) solmuissa
 - erilaisiksi jonotusviiveiksi (queueing delay) sekä ennen lähetystä että ennen prosessointia
- Huom.
 - etenemis- ja lähetysviiveet ovat deterministisiä
 - prosessointiviiveet ovat (tyypillisesti) satunnaisia
 - jonotusviiveet ovat (aina) satunnaisia
- Seuraavaksi esitettävä liikenneteoreettinen malli
 - huomioi lähetysviiveet sekä lähetykseen liittyvät jonotusviiveet
 - mutta jättää huomioitta etenemisviiveet, prosessointiviiveet sekä prosessointiin liittyvät jonotusviiveet (jälkimmäisten viiveiden huomioonotto vaatisi mallin laajennuksen; mieti miten)

24

Linkit $j = 1, \dots, J$

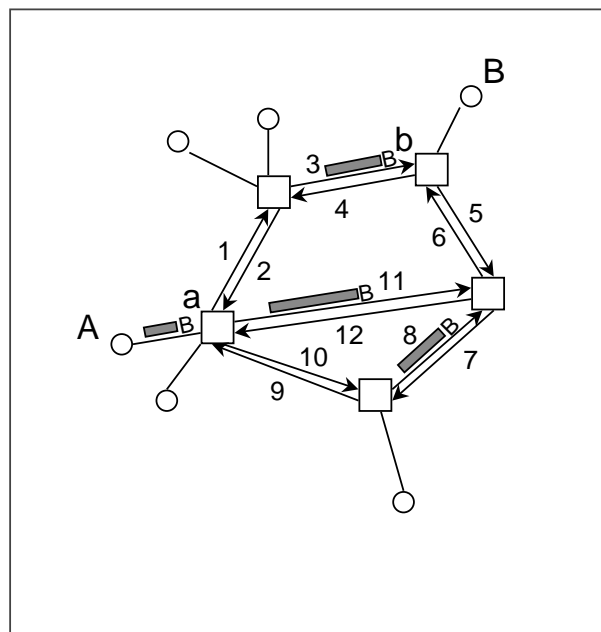
- Mallissa oletetaan (toisin kuin piirikytkentäisen verkon tapauksessa), että
 - kaikki linkit ovat **yksisuuntaisia** (miksi?)
- Merk. J :llä runkoverkon linkkien lkm:ää, ja indeksoidaan niitä j :llä:
 - $j = 1, \dots, J$
 - kuvassa: $J = 12$
- Merk. C_j :llä linkin j kapasiteettia (bittinä/s)



25

Reitit $r = 1, \dots, R$

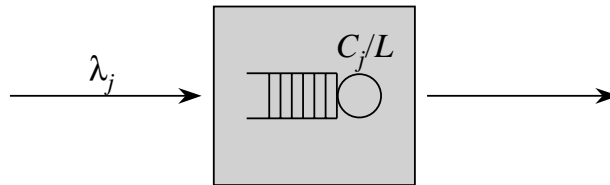
- Määritellään **reitti** tarkoittamaan (tässä yhteydessä) järjestettyä joukkoa (yksisuuntaisia) linkkejä, jotka yhdistävät kaksi runkoverkon solmua (so. lähdesolmun ja määränpääsolmun) toisiinsa
- Merk. R :llä eri reittien lkm:ää, ja indeksoidaan niitä r :llä:
 - $r = 1, \dots, R$
 - kuvassa:
 $R = 2 * (12 + 10 + 7 + 3) = 64$
 - lisäksi esim. solmusta a on kolme eri reittiä solmuun b:
 $(1,3), (11,6), (10,8,6)$
 - näillä reiteillä: solmu a on lähde ja solmu b on määränpää



26

Yksittäisen linkin malli

- Yksittäinen linkki mallinnetaan
 - yhden palvelijan ($n = 1$) **puhtaana jonotusjärjestelmänä**, jossa on siis ääretön määrä odotuspaikkoja ($m = \infty$)
- Merkitään
 - λ_j = pakettien saapumisintensiteetti linkkiä j vastaavaan jonoon (pakettia/s)
 - L = keskimääräinen paketin pituus (bitteinä)
 - $1/\mu_j = L/C_j$ = keskimääräinen paketin lähetysaika linkillä j (s)
- Stabiilisuusvaatimus: $\lambda_j < \mu_j$



27

Pakettien saapumisintensiteetit linkeille

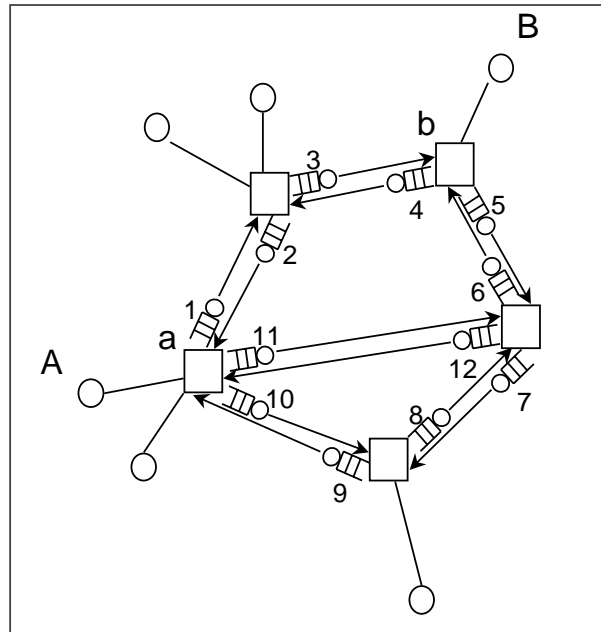
- Oletetaan tunnetuiksi:
 - $\lambda(r)$ = reittiä r noudattavien pakettien saapumisintensiteetti (pakettia/s)
 - $R(j)$ = linkin j kautta kulkevien reittien joukkoa
 - nämä reitit selviävät runkoverkon solmujen reititystauluista, jotka kertovat (yleensä pelkästään määränpääosoitteen perusteella), mille linkille mikin paketti seuraavaksi reititetään
- Tällöin saamme linkkikohtaiset saapumisintensiteetit kaavalla

$$\lambda_j = \sum_{r \in R(j)} \lambda(r)$$

28

Jonoverkkomalli

- Reittiä r kulkevan paketin runkoverkossa kokema viive koostuu (yksinkertaistetussa mallissamme)
 - reitin varrella olevien jonojen aiheuttamista jonotus- ja lähetysviiveistä (niiden summana)
- Huom.
 - Keskimääräinen päästä-päähän viive on sama kaikille samaa reittiä noudattaville paketeille
- Reitti siis määrää paketin **luokan**



29

Tila-avaruus S

- Merkitään x_j :llä jonossa j olevien pakettien lkm:ää (sisältäen mahdollisen lähetyksessä olevan paketin)
 - $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_j)$
- Vektoria \mathbf{x} kutsutaan systeemin **tilaksi** (state)
 - Yksityiskohtaisempaa tilakuvausta (sisältäen paikka- ja luokkatiedon kustakin jonossa olevasta paketista) ei jäljempänä tehtävien oletusten vuoksi tarvita!
- Koska x_j voi saada mitä tahansa ei-negatiivisia kokonaislukuarvoja, **tila-avaruudeksi** S tulee

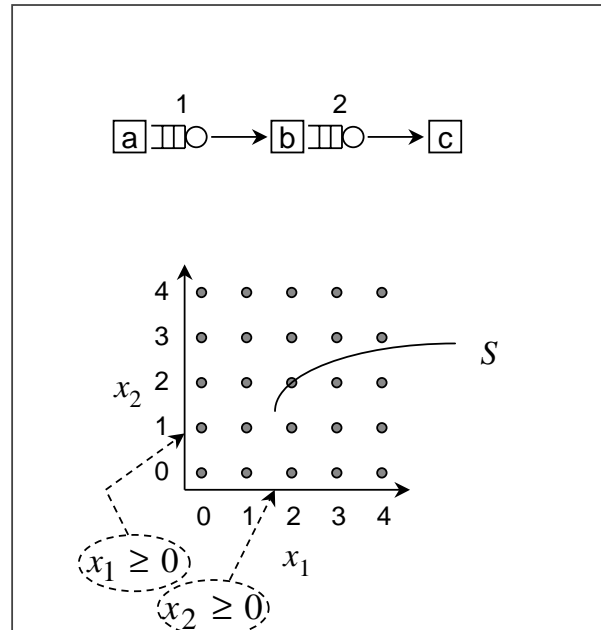
$$S = \{\mathbf{x} \geq 0\}$$

- Huom. Tässä tapauksessa tila-avaruus on siis **ääretön**

30

Esimerkki

- 2 linkkiä:
 - linkki a-b
 - linkki b-c
- 3 reittiä:
 - reitti a-b
 - reitti b-c
 - reitti a-b-c
- Tila-avaruus:
 - $S = \{(0,0), (1,0), (0,1), (2,0), (1,1), (0,2), (3,0), (2,1), (1,2), (0,3), \dots\}$



31

Tilatodennäköisyydet (1)

- Oletetaan, että
 - kullekin reitille r generoituu (toisistaan riippumatta) uusia paketteja Poisson-prosessin mukaisesti intensiteetillä $\lambda(r)$
 - kaikkien pakettien pituudet ovat riippumattomia ja eksponentiaalisesti jakautuneita keskiarvoon L
- Tällöin
 - uusia, linkin j kautta lähetettäviä paketteja saapuu Poisson-prosessin mukaisesti intensiteetillä λ_j , missä

$$\lambda_j = \sum_{r \in R(j)} \lambda(r)$$

- ko. pakettien lähetysajat ovat riippumattomia ja eksponentiaalisesti jakautuneita keskiarvoon $1/\mu_j = L/C_j$

32

Tilatodennäköisyydet (2)

- Oletetaan lisäksi, että
 - systeemi on **stabiili**: $\lambda_j < \mu_j$ kaikilla j
 - paketin siirtyessä jonosta toiseen sen pituus arvotaan riippumattomasti uudestaan em. jakaumasta
 - ns. **Kleinrockin riippumattomuusoletus** (independence assumption)
- Tällöin voidaan osoittaa, että (minkä tahansa) tilan $\mathbf{x} \in S$ todennäköisyys $\pi(\mathbf{x})$ on ns. tasapainotilanteessa (steady state)

$$\pi(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^J (1 - \rho_j) \rho_j^{x_j}$$

missä ρ_j viittaa linkin j liikennekuormaan:

$$\rho_j = \frac{\lambda_j}{\mu_j} = \frac{\lambda_j L}{C_j} < 1$$

33

Tilatodennäköisyydet (3)

- Tilatodennäköisyyttä $\pi(\mathbf{x})$ sanotaan (jälleen) **tulomuotoiseksi**
 - Pakettien lkm:t eri jonoissa ovat (jopa) toisistaan **riippumattomia** (miksi?)
- Yksittäiset jonot j käyttäytyvät kuten M/M/1 jonosysteemit:
 - pakettien lkm jonossa j noudattaa geometrista jakaumaa keskiarvolla

$$\bar{X}_j = \frac{\rho_j}{1 - \rho_j}$$

34

Keskimääräinen viive runkoverkossa

- Tarkastellaan sitten reittiä r noudattavien pakettien kokemaa keskimääräistä (runkoverkon aiheuttamaa) viivettä
 - Merk. $J(r)$:llä reittiin r kuuluvien linkkien joukkoa
- Littlen kaavan nojalla keskimääräinen paketin kokema kokonaisviive jonossa j (sisältäen sekä jonotus- että lähetysviiveen) tulee olemaan

$$\bar{T}_j = \frac{\bar{X}_j}{\lambda_j} = \frac{1}{\lambda_j} \cdot \frac{\rho_j}{1 - \rho_j} = \frac{1}{\mu_j - \lambda_j}$$

- Reittiä r noudattavien pakettien kokemaksi keskimääräiseksi kokonaisviiveeksi tulee siten

$$\bar{T}(r) = \sum_{j \in J(r)} \bar{T}_j = \sum_{j \in J(r)} \frac{1}{\mu_j - \lambda_j}$$

35

THE END



36