

Huom. Tehtävä 3 on kotitehtävä, jonka mallivastaus käydään läpi vasta seuraavissa laskuharjoituksissa. Palauta vastauksesi ennen seuraavia harjoituksia (14.3.) tietoverkkolaboratorion ilmoitustaulun alla olevaan kurssin lokeroon (G-siipi, 2. kerros), tai suoraan assistentille seuraavien harjoitusten (14.3.) alussa.

1. Olkoot X_1 ja X_2 kaksi riippumatonta ja samoin jakautunutta satunnaismuuttujaa yhteisenä jakaumanaan $\text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Määritellään uusi satunnaismuuttuja Z näiden summana:

$$Z = X_1 + X_2.$$

a) Määrää satunnaismuuttujan Z arvojoukko, tiheysfunktio, kertymäfunktio, odotusarvo ja varianssi.

b) Laske lisäksi hajonta ja variaatiokerroin tapauksessa $\lambda = 1$.

(*Ohje:* Laske ensin Z :n kertymäfunktio lähtien kaavasta $P\{Z \leq z\} = \int_0^z P\{X_1 \in dx, X_2 \leq z - x\}$ ja hyödyntäen muuttujien välistä riippumattomuutta. Tiheysfunktion saat kertymäfunktioita derivoimalla. Varianssia laskettaessa voi hyödyntää muuttujien välistä riippumattomuutta.)

2. Tarkastellaan puhdasta menetysjärjestelmää, jossa on kaksi rinnakkaista palvelinta. Kummankin palvelimen palvelunopeus on $\mu > 0$. Palveluajat oletetaan riippumattomiksi ja eksponentiaalisesti jakautuneiksi (intensiteettinä siis μ). Oletetaan, että hetkellä 0 tyhjään systeemiin saapuu kaksi asiakasta, joita aletaan heti palvella. Tämän jälkeen systeemiin ei saavu uusia asiakkaita. Merkitään T :llä sitä (satunnaista) hetkeä, jolloin systeemi tulee taas tyhjäksi (eli viimeisenkin asiakkaan palvelu päättyy). Mikä on satunnaismuuttujan T odotusarvo?

(*Ohje:* Kyseessä on riippumattomien sm:ien maksimi.)

3. *Kotitehtävä* (deadline 14.3. klo 9.00):

Tarkastellaan puhdasta jonotusjärjestelmää, jossa on kolme rinnakkaista palvelinta. Kaikkien palvelimien palvelunopeus on μ asiakasta minuutissa. Palveluajat oletetaan riippumattomiksi ja eksponentiaalisesti jakautuneiksi (intensiteettinä siis μ).

a) Oletetaan ensin, että uuden asiakkaan saapuessa systeemissä on kaksi asiakasta, jotka ovat olleet palveltavina jo x sekuntia. Palvelimista siis kaksi on varattuna ja yksi vapaana, joten uutta asiakasta ruvetaan heti palvelemaan vapaalla palvelimella. Millä todennäköisyydellä uusi asiakas poistuu järjestelmästä toisena?

b) Oletetaan sitten, että uuden asiakkaan saapuessa systeemissä onkin kolme asiakasta, joita kaikkia on jo palveltu x sekuntia. Kaikki palvelimet ovat siis varattuina, joten uuden asiakkaan palvelu aloitetaan vasta, kun jokin palvelimista vapautuu. Millä todennäköisyydellä uusi asiakas poistuu järjestelmästä toisena?

(*Ohje:* Hyödynnä eksponenttijakauman unohtavaisuusominaisuutta.)