

Huom. Tehtävä 3 on kotitehtävä, jonka mallivastaus käydään läpi vasta seuraavissa laskuharjoituksissa. Palauta vastauksesi ennen seuraavia harjoituksia (21.3.) tietoverkkolaboratorion ilmoitustaulun alla olevaan kurssin lokeroon (G-siipi, 2. kerros), tai suoraan assistentille seuraavien harjoitusten (21.3.) alussa.

1. Olkoon pisteprosessi τ_n Poisson-prosessi intensiteettinä $\lambda > 0$, ts. väliajat $\tau_n - \tau_{n-1}$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita: $\tau_n - \tau_{n-1} \sim \text{Exp}(\lambda)$. Merkitään $A(t)$:llä vastaavaa laskuriprosessia: $A(0) = 0$ ja $A(t) = \max\{n = 0, 1, 2, \dots \mid \tau_n \leq t\}$, kun $t > 0$. Osoita (vetoamatta luennoilla esitettyyn Määritelmään 3), että
 - a) $P\{A(t) = 0\} = e^{-\lambda t}$ ja
 - b) $P\{A(t) = 1\} = \lambda t e^{-\lambda t}$.

(Ohje: Laske ensin todennäköisyydet $P\{A(t) \geq 0\}$, $P\{A(t) \geq 1\}$ ja $P\{A(t) \geq 2\}$. Näistä kaksi ensimmäistä ovat helppoja ja kolmannessa voidaan hyödyntää edellisen harjoituksen tehtävän 1 tulosta.)
2. Tarkastellaan seuraavia kolmitilaisia Markov-prosesseja (tila-avaruutena joukko $S = \{0, 1, 2\}$). Prosessit on määritelty kertomalla, milloin eri tilasiirtymäintensiteetit q_{ij} , $i, j \in S$, ovat nollia (0) ja milloin ne ovat positiivisia (+).

(i, j)	(0,1)	(0,2)	(1,0)	(1,2)	(2,0)	(2,1)
a)	+	0	0	+	+	+
b)	+	0	0	+	+	0
c)	+	0	0	+	0	0
d)	0	0	+	0	0	+
e)	+	0	+	+	0	+
f)	+	+	+	+	+	+

Piirrä eri prosessien tilasiirtymäkaaviot. Mitkä näistä prosesseista ovat pelkistymättömiä?

3. *Kotitehtävä* (deadline 21.3. klo 9.00):
Jatketaan edellisessä tehtävässä esitettyjen prosessien tarkastelua. Tarkennamme prosessien määrittelyä antamalla tarkat siirtymäintensiteetit q_{ij} alla olevassa taulukossa.

(i, j)	(0,1)	(0,2)	(1,0)	(1,2)	(2,0)	(2,1)
a)	1	0	0	1	1	10
b)	1	0	0	1	1	0
c)	1	0	0	1	0	0
d)	0	0	1	0	0	10
e)	1	0	10	1	0	10
f)	1	10	10	1	1	10

- a) Mitkä näistä prosesseista ovat pelkistymättömiä ja positiivisesti palautuvia (ts. millä niistä on tasapainojakauma)? Laske positiivisesti palautuvien prosessien tasapainojakauma.
- b) Mitkä positiivisesti palautuvista prosesseista ovat kääntyviä (ts. mitkä niistä toteutuvat ns. lokaalit tasapainoehdot)?