9. Simulointi

Sisältö

- Johdanto
- Liikenneprosessin reaalisaatioiden tuottaminen
- Satunnaismuuttujan arvonta annetusta jakaumasta
- Tietojen keruu
- Tilastollinen analyysi

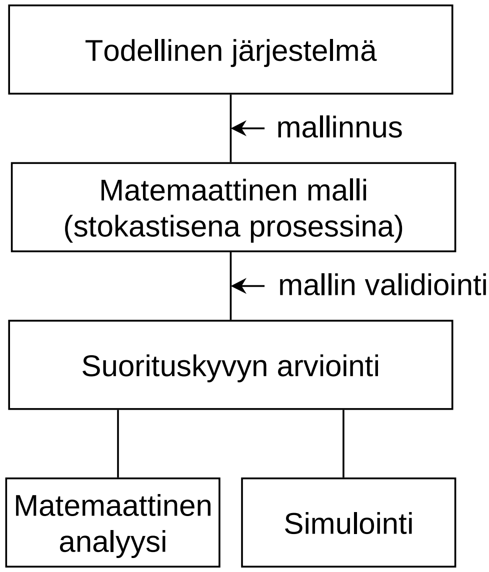
Mitä simulointi on?

- **Simulointi** on (liikenneteorian kannalta) eräs tilastollinen menetelmä tarkasteltavan järjestelmän suorituskyvyn arvioimiseksi
- Se sisältää neljä eri vaihetta:
  - Järjestelmän (olemassa olevan tai kuvitteellisen) mallinnus dynaamisena (ajassa kehittyvänä) stokastisena prosessina
  - Prosessin reaalisaatioiden tuottaminen (“todellisuuden havainnointi“)
    - tällaista reaalisaatiota kutsutaan usein simulointiajoksi (simulation run)
  - Tietojen keruu (“mittaus”)
  - Kerättyjen tietojen tilastollinen analyysi ja johtopäätösten teko

Vaihtoehto, mutta mille?

- Aiemmin olemme jo tutustuneet toiseen suorituskyvyn arviointimenetelmään, nimittäin **matemaattiseen analyysíin**
- Se sisältää vain kaksi vaihetta
  - Järjestelmän mallinnus ajassa kehittyvänä stokastisena prosessina (tässä kurssissa rajoituimme syntymä-kuolema-prosesseihin)
  - Mallin analyyttinen ratkaisu
- Järjestelmän mallinnusvaihe on kummallekin yhteinen
  - tosin mallin tarkkuudella voi olla suuriakin eroja: toisin kuin simulointi, matemaattinen analyysi edellyttää yleensä hyvinkin rajoittavien oletusten tekoa

Liikenneteoreettisen järjestelmän suorituskyvyn arviointi



Analyysi vs. simulointi (1)

- Matemaattisen analyysin **edut**:
  - Tulosten tuottaminen nopeaa
  - Tulokset tarkkoja
  - Antaa näkemystä
  - Optimointi usein mahdollista (vaikkakin saattaa olla vaikeaa)
- Matemaattisen analyysin **haitat**:
  - Asettaa rajoittavia ehtoja mallinnukseen
    $\Rightarrow$ malli yleensä liian yksinkertainen
    $\Rightarrow$ monimutkaisten järjestelmien suorituskyvyn arviointi lähes mahdotonta
  - Rajoittavien ehtojenkin vallitessa analyysi itsessään yleensä vaikeaa

Analyysi vs. simulointi (2)

- Simuloinnin **edut**:
  - Ei rajoittavia ehtoja mallinnusvaiheessa
    $\Rightarrow$ mahdollistaa monimutkaistenkin järjestelmien suorituskyvyn arvioinnin
  - Mallinnus yleensä hyvin suoraviivaista
- Simuloinnin **haitat**:
  - Tulosten tuottaminen yleensä työlästä (simulointiajot vaativat paljon prosessoriaikaa)
  - Tulokset epätarkkoja (tosin tarkentuvia: mitä enemmän ajoja, sitä tarkemmat tulokset)
  - Kokonaisnäkemyksen saaminen vaikeampaa
  - Optimointi mahdollista vain hyvin rajoitetusti (esim. muutaman erilaisen “parametrikombinaation” tai ohjausperiaatteen vertailu)

Stokastisen prosessin simuloinnin vaiheet

- Järjestelmän mallinnus ajassa kehittyvänä stokastisena prosessina
  - tästä on jo puhuttu kurssin aiemmilla luennoilla
  - jatkossa otamme lähtökohdaksi annetun mallin (so. stokastisen prosessin)
  - lisäksi rajoitamme tarkastelun tällä luennolla yksinkertaisiin liikenneteoreettisiin malleihin (vrt. aiemmat luennot)
- Prosessin reaalisaatioiden tuottaminen
  - satunnaislukujen generointi
  - tapahtumaohjattu simulointi
  - usein simuloinnilla tarkoitetaan pelkästään tätä vaihetta (liikenneteorian kannalta se on kuitenkin simulointia suppeammassa mielessä)
- Tietojen keruu
  - transientti vaihe vs. tasapainotila
- Tilastollinen analyysi ja johtopäätökset
  - piste-estimaattorit
  - luottamusvälit

Simuloinnin toteutus

- Simulointiohjelma sisältää yleensä kaikki edellä mainitut vaiheet mallinnusta ja johtopäätöksiä lukuunottamatta, ts.
  - järjestelmän malliksi valitun stokastisen prosessin reaalisaatioiden tuottamisen,
  - tietojen keruun sekä
  - kerättyjen tietojen tilastollisen analyysin
- Simulointiohjelma voidaan toteuttaa
  - kokonaisuudessaan jollakin **yleiskäyttöisellä ohjelmointikielellä**
    - esim. C tai C++
    - joustavaa mutta työlästä ja riskialtista mahdollisille ohjelmointivirheille
  - käyttäen hyväksi joitakin **simulointiin erikoistuneita ohjelmakirjastoja**
    - esim. CNCL
  - erityisesti simulointeja varten kehitetyillä **simulointiohjelmistoilla**
    - esim. OPNET, BONeS, NS
    - nopeaa ja luotettavaa (s/w:n laadusta riippuen tietysti) mutta jäykkää

Muita simulointitapoja

- Edellä kuvattu:
  - miten simuloidaan tarkasteltavaa järjestelmää kuvaavan matemaattisen mallin (diskreettitilaisen stokastisen prosessin) kehitystä ajassa tavoittena saada jotain tietoa ko. systeemin käyttäytymisestä
  - kyseessä **diskreetti**, **dynaaminen** ja **stokastinen** simulointi
  - jatkossa rajoitumme tällaiseen simulointiin
- Muita simuloititapoja:
  - **jatkuvassa** simuloinnissa tila-avaruus on jatkuva (tilamuuttujien riippuvuudet annetaan yleensä diffrentiaaliyhtälösysteeminä), esim. lentokoneen lentoradan simulointi
  - **staattisessa** simuloinnissa (josta käytetään myös nimeä Monte-Carlo-tyyppinen simulointi) ajan kulumisella ei ole merkitystä (ei ole olemassa prosessia, jota luonnehtisi erilaiset tapahtumat), esim. moniulotteisten integraalien numeerinen integrointi ns. Monte-Carlo-menetelmällä
  - **deterministinen** simulointi ei taas sisällä ollenkaan satunnaisia komponentteja

Sisältö

- Johdanto
- Liikenneprosessin reaalisaatioiden tuottaminen
- Satunnaismuuttujan arvonta annetusta jakaumasta
- Tietojen keruu
- Tilastollinen analyysi

Liikenneprosessin reaalisaatioiden tuottaminen

- Oletetaan, että olemme mallintaneet tarkasteltavan järjestelmän stokastisena prosessina
- Seuraavana tehtävänä on prosessin reaalisaatioiden tuottaminen
  - Se koostuu kahdesta osasta:
    - kaikille prosessin kulkuun vaikuttaville satunnaismuuttujille on arvottava arvot (yleensä reaaliluku) satunnaisesti ko. sm:n jakaumasta (sm:ien väliset riippuvuudet tietysti huomioiden)
    - näin saaduilla arvoilla konstruoidaan prosessin reaalisaatio ts. sen kehittyminen ajassa
  - Nämä kaksi osaa eivät suinkaan tapahdu peräkkäin eri vaiheissa, vaan nimenomaan **limittäin**
  - Satunnaismuuttujien arvojen arvonta perustuu ns. **(pseudo)satunnaislukujen generointiin** (random number generation)
  - Prosessin reaalisaation konstruointi tehdään yleensä **tapahtumapohjaisesti** (discrete event simulation)

Tapahtumapohjainen simulointi (1)

- Idea: simulointi etenee **tapahtumasta tapahtumaan**
  – jos jollakin aikavälillä ei tapahdu mitään, voimme hypätä ko. aikavälin yli
- Tapahtuma vastaa (yleensä) aina systeemin tilan muuttumista
  – esim. yksinkertaisessa liikenneteoreettisessa mallissa mahdollisia tapahtumia ovat ainakin asiakkaiden saapumiset ja poistumiset systeemistä
  – prosessin reaalisaation generoinnin lopetus on kuitenkin oma tapahtumansa
  – samoin tietojen keruu voi aiheuttaa joitakin “ylimääräisiä“ tapahtumia
- Tapahtuma karakterisoidaan kahdella parametrilla
  – tapahtumahetki (so. milloin tapahtuma käsitellään) ja
  – tapahtuman tyyppi (so. miten tapahtuma käsitellään)

Tapahtumapohjainen simulointi (2)

- Tapahtumat organisoidaan yleensä tapahtumahetken mukaan järjestetyksi **tapahtumalistaksi** (event list), jonka kärjessä on seuraavaksi sattuva tapahtuma (siis aikaisin tapahtumahetki)
  – Listaa käydään läpi tapahtuma tapahtumalta (generoiden samalla uusia tapahtumia listan loppupäähän). Kun tapahtuma on käsitelty, se poistetaan listalta.
- **Simulointikello** (simulation clock) kertoo, mikä on käsiteltävänä olevan tapahtuman hetki
  – se siis etenee hyppäyksittäin
- **Systeemin tila** (system state) kertoo systeemin nykyisen tilan

Tapahtumapohjainen simulointi (3)

- Algoritmi yhden **simulointiajon** suorittamiseksi tapahtumapohjaisesti:
  1 Initialisointi
    - aseta simulointikello nollaksi
    - aseta systeemin tila valittuun alkuarvoonsa
    - generoi kunkin tapahtumatyypin seuraava tapahtuma (mikäli mahdollista) ja liitä näin saadut tapahtumat tapahtumalistaan
  2 Tapahtuman käsittely
    - aseta simulointiajaksi (tapahtumalistan kärjessä olevan) seuraavan tapahtuman tapahtumahetki
    - käsittele tapahtuma (mahdollisesti generoiden samalla uusia tapahtumia ja liittäen ne tapahtumalistaan tapahtumahetkensä mukaiseen järjestykseen) sekä päivitä systeemin tila
    - poista käsitelty tapahtuma tapahtumalistalta
  3 Lopetusehdon testaus
    - jos lopetusehto on voimassa, lopeta prosessin reaalisaation generointi; muutoin palaa kohtaan 2

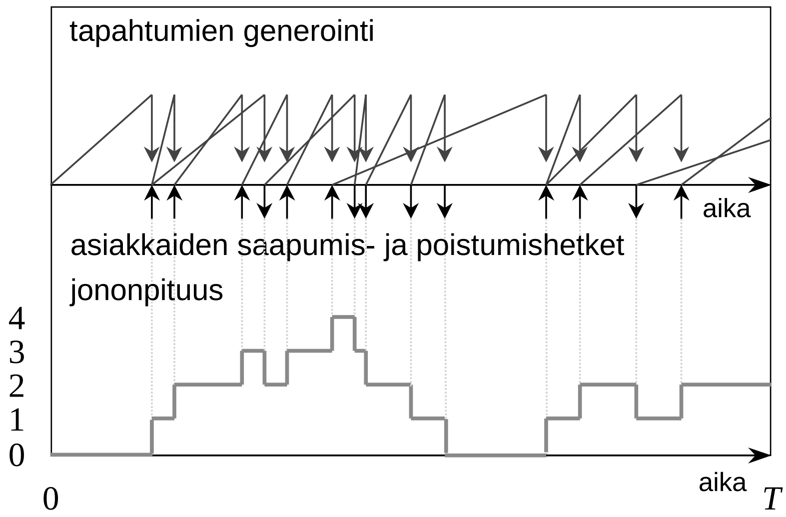
Esimerkki (1)

- **Tehtävä**: Simuloidaan M/M/1-jonon jononpituuden kehitystä ajassa hetkestä 0 hetkeen T olettaen, että systeemi on tyhjä hetkellä 0
  – Systeemin tila (hetkellä t) = jononpituus X_t
    - alkuarvo: $X_0 = 0$
  – Perustapahtumat:
    - asiakkaan saapuminen systeemiin
    - asiakkaan poistuminen systeemistä
  – Muut tapahtumat:
    - simuloinnin lopetus hetkellä T
  – **Huom**. Tietojen keruuta ei ole sisällytetty tähän esimerkkiin

Esimerkki (2)

- Initialisointi:
  - asetetaan $X_0 = 0$
  - arvotaan ensimmäisen asiakkaan saapumishetki $\mathrm{Exp}(\lambda)$-jakaumasta
- Tapahtuman käsittely uuden asiakkaan saapuessa (hetkellä t)
  - systeemin tilaa eli jononpituutta kasvatetaan yhdellä: $X_t = X_t + 1$
  - jos systeemi oli tyhjä asiakkaan saapuessa, generoidaan ko. asiakkaan poistumishetki $t + S$, missä S on arvottu $\mathrm{Exp}(\mu)$-jakaumasta
  - generoidaan seuraavan asiakkaan saapumishetki $t + I$, missä I on arvottu $\mathrm{Exp}(\lambda)$-jakaumasta
- Tapahtuman käsittely asiakkaan poistuessa (hetkellä t)
  - systeemin tilaa eli jononpituutta vähennetään yhdellä: $X_t = X_t - 1$
  - jos systeemiin jäi asiakkaita, generoidaan seuraavaksi palveltavan asiakkaan poistumishetki $t + S$, missä S on arvottu $\mathrm{Exp}(\mu)$-jakaumasta
- Lopetusehto: $t > T$

Esimerkki (3)



Sisältö

- Johdanto
- Liikenneprosessin reaalisaatioiden tuottaminen
- Satunnaismuuttujan arvonta annetusta jakaumasta
- Tietojen keruu
- Tilastollinen analyysi

Satunnaismuuttujan arvonta annetusta jakaumasta

- Pohjana ns. **(pseudo)satunnaislukujen generointi**
  - tavoitteena on tuottaa riippumattomia U(0,1)-jakautuneita satunnais-muuttujia (siis välin (0,1) tasajakaumaa noudattavia)
- Haluttuun jakaumaan päästään U(0,1)-jakaumasta esimerkiksi jollakin seuraavista menetelmistä:
  - **uudelleenskaalaus** ($\Rightarrow$ U(a,b))
  - **diskretointi** ($\Rightarrow$ Bernoulli(p), Bin(n,p), Poisson(a), Geom(p))
  - **kertymäfunktion käännös** ($\Rightarrow$ Exp(λ))
  - **muut muunnokset** ($\Rightarrow$ N(0,1) $\Rightarrow$ N(μ,σ^2))
  - **hyväksymis-hylkäys-menetelmä** (kun kyseessä rajoitetulla välillä määritelty jatkuva jakaumaa, jolla rajoitettu tiheysfunktio)
    - tarvitaan kaksi riippumatonta U(0,1)-jakaumaa noudattavaa sm:aa

Satunnaislukujen generointi

- **Satunnaislukugeneraattorilla** (random number generator) tarkoitetaan algoritmia, joka tuottaa sarjan (näennäisesti) satunnaisia kokonaislukuja Z_i jollakin välillä $0,1,\ldots,m-1$
  - tuotettu sarja on aina jaksollinen (tavoitteena mahdollisimman pitkä jakso)
  - generoidut luvut eivät tiukasti ottaen ole ollenkaan satunnaisia vaan täysin deterministisiä (tästä nimitys pseudosatunnainen)
  - jos satunnaislukugeneraattori on huolellisesti suunniteltu ja toteutettu, niin sen tuottamat pseudosatunnaiset luvut kuitenkin näyttävät ikään kuin riippumattomilta ja samoin jakautuneilta (IID) noudattaen tasaista jakaumaa joukossa $\{0,1,\ldots,m-1\}$
- Satunnaislukugeneraattorin generoimien satunnaislukujen “satunnaisuus“ on testattava tilastollisin testein
  - saadun empiirisen jakauman tasaisuus joukossa $\{0,1,\ldots,m-1\}$
  - generoitujen satunnaislukujen välinen riippumattomuus (käytännössä korreloimattomuus)

Satunnaislukugeneraattoreita

- Yksinkertaisimpia ovat ns. lineaariset kongruentiaaliset generaattorit (linear congruential generator). Näistä erikoistapauksena saadaan ns. multiplikatiiviset kongruentiaaliset generaattorit (multiplicative congruential generator).
- Kummassakin tapauksessa uusi satunnaisluku määräytyy algoritmisesti välittömästi edellisestä, ts. $Z_{i+1} = f(Z_i)$
  $\Rightarrow$ jakso korkeintaan m
- Muita menetelmiä: additive congruential generators, shuffling, ...

Linear congruential generator (LCG)

- **Lineaarinen kongruentiaalinen** satunnaislukugeneraattori tuottaa satunnaisia kokonaislukuja Z_i joukosta $\{0,1,\ldots,m-1\}$ kaavalla:

$$Z_{i+1} = (aZ_i + c) \bmod m$$

  – parametrit a, c ja m ovat ei-negatiivisia kokonaislukuja ($a < m$, $c < m$)
  – lisäksi tarvitaan ns. **siemenluku** (seed) $Z_0 < m$
- **Huom**.
  – Parametrit on valittava huolella; muutoin tuloksena kaikkea muuta kuin satunnaisia lukuja.
  – Tietyin edellytyksin jaksoksi saadaan maksimiarvo m
    - esim. kun m muotoa 2^b, c pariton ja a muotoa $4k+1$

Multiplicative congruential generator (MCG)

- **Multiplikatiivinen kongruentiaalinen** satunnaislukugeneraattori tuottaa satunnaisia kokonaislukuja Z_i joukosta $\{0,1,\ldots,m-1\}$ kaavalla:

$$Z_{i+1} = (aZ_i) \bmod m$$

  – parametrit a, c ja m ovat ei-negatiivisia kokonaislukuja ($a < m$, $c < m$)
  – lisäksi tarvitaan siemenluku $Z_0 < m$
- **Huom**.
  – Kyseessä on siis LCG:n erikoistapaus valinnalla $c = 0$.
  – Parametrit on tässäkin tapauksessa valittava huolella
  – Mikään parametrikombinaatio ei tuota (maksimaalista) jaksoa m
    - esim. jos m muotoa 2^b, niin jakso on korkeintaan 2^{b-2}
  – Kuitenkin, jos m on **alkuluku**, jakso $m-1$ on mahdollinen
    - PMMLCG = prime modulus multiplicative LCG
    - esim. $m = 2^{31}-1$ ja $a = 16{,}807$ (tai $a = 630{,}360{,}016$)

U(0,1)-jakautuneen sm:n generointi

- Olkoon Z jonkin satunnaislukugeneraattorin tuottama (pseudo)satunnainen kokonaisluku välillä $\{0,1,\ldots,m-1\}$
- Tällöin (approksimatiivisesti)

$$U = \frac{Z}{m} \approx \mathrm{U}(0,1)$$

Tasajakaumaa noudattavan sm:n generointi

- Olkoon $U \sim \mathrm{U}(0,1)$
- Tällöin

$$X = a + (b-a)U \sim \mathrm{U}(a,b)$$

- Tätä sanotaan **uudelleenskaalausmenetelmäksi** (rescaling method)

Diskreetin sm:n generointi

- Olkoon $U \sim \mathrm{U}(0,1)$
- Oletetaan lisäksi, että Y on **diskreetti** sm
  - arvojoukolla $S = \{0,1,\ldots,n\}$ tai $S = \{0,1,2,\ldots\}$
- Merkitään $F(x) = P\{Y \le x\}$. Tällöin

$$X = \min\{x \in S \mid F(x) \ge U\} \sim Y$$

- Tätä sanotaan **diskretointimenetelmäksi (**discretization method)
  - Itse asiassa kyseessä on ns. 'kertymäfunktion käännös'-menetelmän eräs muoto
- **Esim**. Bernoulli(p)-jakauma:

$$X = \begin{cases} 0, & \text{jos } U \le 1-p \\ 1, & \text{jos } U > 1-p \end{cases} \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$$

'Kertymäfunktion käännös' -menetelmä

- Olkoon $U \sim \mathrm{U}(0,1)$
- Oletetaan, että Y on sellainen **jatkuva** sm, jolle kertymäfunktio $F(x) = P\{Y \le x\}$ on aidosti kasvava
- Merkitään $F^{-1}(y)$:llä kertymäfunktion $F(x)$ käänteisfunktiota. Tällöin

$$X = F^{-1}(U) \sim Y$$

- Tätä sanotaan **'kertymäfunktion käännös'-menetelmäksi** (inverse transform method)
- **Tod**. Koska $P\{U \le u\} = u$ kaikilla $u \in (0,1)$, pätee

$$P\{X \le x\} = P\{F^{-1}(U) \le x\} = P\{U \le F(x)\} = F(x)$$

Eksponenttijakaumaa noudattavan sm:n generointi

- Olkoon $U \sim \mathrm{U}(0,1)$
  - seuraus: $1-U \sim \mathrm{U}(0,1)$
- Olkoon $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$
  - kf $F(x) = P\{Y \le x\} = 1-e^{-\lambda x}$ on selvästikin aidosti kasvava
  - kf:n käänteisfunktio on $F^{-1}(y) = -(1/\lambda)\log(1-y)$
- Näin ollen (‘kertymäfunktion käännös’-menetelmän mukaan)

$$X = F^{-1}(1-U) = -\frac{1}{\lambda}\log(U) \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$$

Normeerattua normaalijakaumaa noudattavan sm:n generointi

- Olkoot U_1 ja U_2 **riippumattomia** ja samoin jakautuneita noudattaen $\mathrm{U}(0,1)$-jakaumaa
- Tällöin, ns. Box-Müller-menetelmän mukaan, alla annetut sm:t X_1 ja X_2 ovat myöskin **riippumattomia** ja samoin jakautuneita noudattaen $\mathrm{N}(0,1)$-jakaumaa:

$$X_1 = \sqrt{-2\log(U_1)}\,\sin(2\pi U_2) \sim \mathrm{N}(0,1)$$
$$X_2 = \sqrt{-2\log(U_1)}\,\cos(2\pi U_2) \sim \mathrm{N}(0,1)$$

Normaalijakaumaa noudattavan sm:n generointi

- Olkoon $X \sim \mathrm{N}(0,1)$
- Uudelleenskaalausmenetelmällä saamme

$$Y = \mu + \sigma X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$$

Sisältö

- Johdanto
- Liikenneprosessin reaalisaatioiden tuottaminen
- Satunnaismuuttujan arvonta annetusta jakaumasta
- Tietojen keruu
- Tilastollinen analyysi

Tilastotietojen keruu

- Johdannossa otettiin lähtökohdaksi, että simuloinnin tavoitteena on tarkasteltavan järjestelmän suorituskyvyn arviointi. Simuloimalla siis pyritään arvioimaan jonkin suorituskykyyn liittyvän parametrin arvo α.
  - Tämä parametri voi liittyä joko järjestelmän **transienttiin** käyttäytymiseen tai sitten ns. **tasapainotilaan** (steady state)
  - Esim.
    - k:n ensimmäisen asiakkaan keskimääräinen odotusaika M/M/1-jonossa olettaen, että systeemi on aluksi tyhjä
    - keskimääräinen jononpituus M/M/1-jonossa aikavälillä $[0,T]$ olettaen, että systeemi on aluksi tyhjä
    - keskimääräinen odotusaika M/M/1-jonossa (tasapainotilanteessa)
- Yksittäinen simulointiajo tuottaa yhden havainnon X, joka jollakin lailla kuvaa arvioitavaa parametria
- Tilastollisten päätelmien tekemiseksi tarvitsemme kuitenkin useita havaintoja $X_1,\ldots,X_n$ (mielellään IID)

Transienttien piirteiden simulointi (1)

- Esim. 1.
  - Tarkastellaan k:n ensimmäisen asiakkaan keskimääräistä odotusaikaa M/M/1-jonossa olettaen, että systeemi on aluksi tyhjä
  - Simulointia jatketaan, kunnes viimeinenkin näistä k asiakkasta on saapunut ja päässyt palveluun
  - Yksittäisestä simulointiajosta saatava havainto X on tässä tapauksessa näiden k asiakkaan odotusaikojen W_i keskiarvo ko. simulointiajossa:

$$X = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} W_i$$

  - Riippumattomia ja samoin jakautuneita (IID) havaintoja $X_1,\ldots,X_n$ voidaan tuottaa ns. **'riippumattomien toistojen' -menetelmällä** (independent replications)
    - ts. tekemällä useita samanlaisia mutta toisistaan riippumattomia simulointiajoja (toisistaan riippumattomilla satunnaisluvuilla)

Transienttien piirteiden simulointi (2)

- Esim. 2.
  - Tarkastellaan keskimääräistä jononpituutta M/M/1-jonossa aikavälillä $[0,T]$ olettaen, että systeemi on aluksi tyhjä
  - Simulointia jatketaan ennalta määrättyyn hetkeen T asti
  - Yksittäisestä simulointiajosta saatava havainto X on tässä tapauksessa jononpituuden $Q(t)$ aikakeskiarvo yli välin $[0,T]$ ko. simulointiajossa:

$$X = \frac{1}{T}\int_0^T Q(t)dt$$

    - Huom. Ko. integraali on helposti laskettavissa, koska jononpituus ei muutu tapahtumien välillä
  - Riippumattomia ja samoin jakautuneita (IID) havaintoja $X_1,\ldots,X_n$ voidaan jälleen tuottaa 'riippumattomien toistojen'-menetelmällä

Tasapainotilaan liittyvien piirteiden simulointi (1)

- Tilastotietojen keruu yksittäisestä simuloinnista tapahtuu periaatteessa samalla tavalla kuin transientteja piirteitä simuloitaessa.
- Simuloinnin alussa on kuitenkin tyypillisesti ns. **lämmittelyvaihe** (warm-up phase), ennen kuin systeemi on likimain tasapainossa, mikä aiheuttaa
  - overheadia
  - harhaisuutta estimaattiin
  - tarpeen määritellä, kuinka pitkä lämmittelyvaihe tarvitaan
- Riippumattomien ja samoin jakautuneiden (IID) havaintojen $X_1,\ldots,X_n$ tuottamiseksi (ainakin likimain) on kolme eri tapaa:
  - riippumattomat toistot (independent replications),
  - ns. 'batch means' -menetelmä ja
  - regeneratiivinen menetelmä (regenerative method)
- Näistä kaksi ensimmäistä vaativat lämmittelyvaiheen mutta kolmas ei

Tasapainotilaan liittyvien piirteiden simulointi (2)

- **Riippumattomien toistojen menetelmä**:
  - tehdään useita samanlaisia mutta toisistaan riippumattomia simulointiajoja (so. saman systeemin simulointia samasta lähtötilasta mutta toisistaan riippumattomilla satunnaisluvuilla)
  - kussakin ajossa tilastotietojen keruu aloitetaan vasta lämmittelyvaiheen jälkeen (kuten sanottu, oma ongelmansa on tämän lämmittelyvaiheen pituuden määrääminen)
  - havainnot IID
- **'Batch means' -menetelmä**:
  - yksi (erittäin) pitkä simulointiajo, joka lämmittelyvaiheen jälkeiseltä osalta (keinotekoisesti) jaetaan *n*:ään yhtä pitkään jaksoon, joita tietojen keruun kannalta käsitellään omina simulointiajoinaan
  - tarvitaan vain yksi lämmittelyvaihe, mutta havainnot eivät ole enää täysin riippumattomia (eivätkä tarkkaan ottaen täysin samoin jakautuneitakaan)

Tasapainotilaan liittyvien piirteiden simulointi (3)

- **Regeneratiivinen menetelmä**:
  - vaaditaan, että simuloitava prosessi on **regeneroituva** (regenerative)
    - esim. G/G/1-jono regeneroituu aina uuden asiakkaan saapuessa tyhjään systeemiin
    - myös kaikki pelkistymättömät Markov-prosessit ovat regeneroituvia (jaksona esim. peräkkäiset vierailut johonkin ennalta kiinnitettyyn tilaan)
  - kultakin ns. regeneroitumisjaksolta (regeneration cycle) saatavat havainnot ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita
  - ei tarvetta erilliseen lämmittelyvaiheeseen
  - ongelmana on, että jaksojen pituudet voivat satunnaisesti kasvaa hyvinkin pitkiksi

Sisältö

- Johdanto
- Liikenneprosessin reaalisaatioiden tuottaminen
- Satunnaismuuttujan arvonta annetusta jakaumasta
- Tietojen keruu
- Tilastollinen analyysi

Parametrien estimointi

- Kuten edellisessä kohdassa todettiin, simuloinnilla pyritään arvioimaan jonkin suorituskykyyn liittyvän parametrin arvo α
- Yksittäinen simulointiajo tuottaa kyseisestä parametrista havainnon X_i, joka siis on satunnaismuuttuja
  - Havaintoa X_i sanotaan **harhattomaksi** (unbiased), jos $E[X_i] = \alpha$
- Olet. että olemme saaneet simuloimalla n kpl riippumattomia ja samoin jakautuneita (IID) havaintoja. Tällöin **otoskeskiarvo** (sample mean)

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

on parametrin α **harhaton** ja **tarkentuva** estimaattori, sillä

$$E[\bar{X}_n] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \alpha$$

$$D^2[\bar{X}_n] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D^2[X_i] = \frac{1}{n}\sigma^2 \to 0 \quad (\text{kun } n \to \infty)$$

Esimerkki

- Pyrimme arvioimaan simuloimalla 25:n ensimmäisen asiakkaan keskimääräistä odotusaikaa M/M/1-jonossa kuormalla $\rho = 0.9$, kun systeemi hetkellä 0 on tyhjä.
  - Teoreettinen arvo: $\alpha = 2.12$
  - Havainnot X_i kymmenestä simulointiajosta ($n = 10$):
    - 1.05, 6.44, 2.65, 0.80, 1.51, 0.55, 2.28, 2.82, 0.41, 1.31
  - Näin ollen parametrin α piste-estimaatti on

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{10}(1.05 + 6.44 + \ldots + 1.31) = 1.98$$

Estimaattorin luottamusväli (1)

- **Määr**. Väliä $(\bar{X}_n - y, \bar{X}_n + y)$ sanotaan parametrin α **luottamusväliksi** (confidence interval) **luottamustasolla** (confidence level) $1-\beta$, jos

$$P\{|\bar{X}_n - \alpha| \le y\} = 1 - \beta$$

  - Tulkinta: “parametri α kuuluu ko. välille tn:llä $1-\beta$”
- Oletetaan sitten, että havainnot X_i, $i = 1,\ldots,n$, ovat IID tuntemattomalla keskiarvolla α mutta **tunnetulla** varianssilla σ^2
- Keskeisen raja-arvolauseen mukaan (kts. Luento 5, kalvo 48), ainakin suurilla n:n arvoilla pätee

$$Z := \frac{\bar{X}_n - \alpha}{\sigma / \sqrt{n}} \approx \mathrm{N}(0,1)$$

Estimaattorin luottamusväli (2)

- Merk. z_p:llä N(0,1)-jakauman p-**fraktiilia**
  - ts. $P\{Z \le z_p\} = p$, missä $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$
  - esim. $\beta = 5\%$ eli $1-\beta = 95\%$ $\Rightarrow$ $z_{1-(\beta/2)} = z_{0.975} \approx 1.96 \approx 2.0$
- **Väite**. Parametrin α luottamusväli luottamustasolla $1-\beta$ on

$$\overline{X}_n \pm z_{1-\frac{\beta}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- **Tod**. Määritelmän mukaan pitää osoittaa, että

$$P\{|\overline{X}_n - \alpha| \le z_{1-\frac{\beta}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\} = 1-\beta$$

$$P\{|\overline{X}_n - \alpha| \le y\} = 1-\beta$$

$$\Leftrightarrow P\{\frac{|\overline{X}_n - \alpha|}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{y}{\sigma/\sqrt{n}}\} = 1-\beta$$

$$\Leftrightarrow P\{\frac{-y}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{\overline{X}_n - \alpha}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{y}{\sigma/\sqrt{n}}\} = 1-\beta$$

$$\Leftrightarrow \Phi(\frac{y}{\sigma/\sqrt{n}}) - \Phi(\frac{-y}{\sigma/\sqrt{n}}) = 1-\beta \qquad [\Phi(x) := P\{Z \le x\}]$$

$$\Leftrightarrow \Phi(\frac{y}{\sigma/\sqrt{n}}) - (1-\Phi(\frac{y}{\sigma/\sqrt{n}})) = 1-\beta \qquad [\Phi(-x) = 1-\Phi(x)]$$

$$\Leftrightarrow \Phi(\frac{y}{\sigma/\sqrt{n}}) = 1-\frac{\beta}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{\sigma/\sqrt{n}} = z_{1-\frac{\beta}{2}}$$

$$\Leftrightarrow y = z_{1-\frac{\beta}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Estimaattorin luottamusväli (3)

- Yleensä odotusarvon α lisäksi myös varianssi σ^2 on tuntematon
- Tällöin se pitää estimoida **otosvarianssista** (sample variance)

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} (\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\overline{X}_n^2)$$

- Voidaan osoittaa, että IID havainnoille otosvarianssi on todellisen varianssin σ^2 harhaton ja tarkentuva estimaattori:

$$E[S_n^2] = \sigma^2$$

$$D^2[S_n^2] \to 0 \quad (\text{kun } n \to \infty)$$

Estimaattorin luottamusväli (4)

- Oletetaan nyt, että havainnot X_i, $i = 1,\ldots,n$, ovat IID noudattaen $\mathrm{N}(\alpha,\sigma^2)$-jakaumaa tuntemattomalla keskiarvolla α ja **tuntemattolla** varianssilla σ^2. Tällöin voidaan osoittaa, että

$$T := \frac{\overline{X}_n - \alpha}{S_n / \sqrt{n}} \sim \mathrm{Student}(n-1)$$

- Merk. $t_{n-1,p}$:llä $\mathrm{Student}(n-1)$-jakauman p-fraktiilia
  - ts. $P\{T \le t_{n-1,p}\} = p$, missä $T \sim \mathrm{Student}(n-1)$
  - esim. 1: $n = 10$ ja $\beta = 5\% \Rightarrow t_{n-1,1-(\beta/2)} = t_{9,0.975} \approx 2.26 \approx 2.3$
  - esim. 2: $n = 100$ ja $\beta = 5\% \Rightarrow t_{n-1,1-(\beta/2)} = t_{99,0.975} \approx 1.98 \approx 2.0$
- Näin ollen parametrin α luottamusväli luottamustasolla $1-\beta$ on

$$\overline{X}_n \pm t_{n-1,1-\frac{\beta}{2}} \cdot \frac{S_n}{\sqrt{n}}$$

Esimerkki (jatkoa)

- Pyrimme arvioimaan simuloimalla 25:n ensimmäisen asiakkaan keskimääräistä odotusaikaa M/M/1-jonossa kuormalla $\rho = 0.9$, kun systeemi hetkellä 0 on tyhjä.
  - Teoreettinen arvo: $\alpha = 2.12$
  - Havainnot X_i kymmenestä simulointiajosta ($n = 10$):
    - 1.05, 6.44, 2.65, 0.80, 1.51, 0.55, 2.28, 2.82, 0.41, 1.31
  - Otoskeskiarvo on 1.98 ja otoshajonta (eli otosvarianssin neliöjuuri) on

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{9}((1.05-1.98)^2 + \ldots + (1.31-1.98)^2)} = 1.78$$

  - Näin ollen parametrin α luottamusväli 95%:n luottamustasolla on

$$\overline{X}_n \pm t_{n-1,1-\frac{\beta}{2}} \cdot \frac{S_n}{\sqrt{n}} = 1.98 \pm 2.26 \cdot \frac{1.78}{\sqrt{10}} = 1.98 \pm 1.27 = (0.71, 3.25)$$

Havaintoja

- Simulointikokeen tulos tarkentuu (so. piste-estimaatin luottamusväli kapenee), kun
  - simulointitoistojen eli riippumattomien havaintojen lukumäärää n kasvatetaan, tai
  - yksittäisen havainnon varianssia σ^2 pienennetään (esim. ajamalla pitempiä yksittäisiä simulointiajoja tai muilla ns. 'varianssin reduktio' -menetelmillä)
- Jos annettuna on haluttu simulointitulosten suhteellinen tarkkuus (so. otoskeskiarvon hajonnan ja odotusarvon välinen suhde), voidaan dynaamisesti päättää, kuinka monta riippumatonta simulointitoistoa on tehtävä ko. tavoitteeseen pääsemiseksi

Kirjallisuutta

- I. Mitrani (1982)
  - “Simulation techniques for discrete event systems”
  - Cambridge University Press, Cambridge
- A.M. Law and W. D. Kelton (1982, 1991)
  - “Simulation modeling and analysis”
  - McGraw-Hill, New York

- **Huom**. Syksyllä 2002 ko. aiheesta luennoidaan oma kurssi:
  - S-38.148 Tietoverkkojen simulointi (2 ov)
  - http://keskus.hut.fi/opetus/s38148/
  - aiemmin ko. kurssi oli nimeltään
    - S-38.147 Televerkkojen simulointi (2 ov)
    - http://keskus.hut.fi/opetus/s38147/

THE END