

Huom. Tehtävä 3 on kotitehtävä, jonka mallivastaus käydään läpi vasta seuraavissa laskuharjoituksissa. Palauta vastauksesi ennen seuraavia harjoituksia (6.3.) tietoverkkolaboratorion ilmoitustaulun alla olevaan kurssin lokeroon (G-siipi, 2. kerros), tai suoraan assistentille seuraavien harjoitusten (6.3.) alussa.

1. Olkoot X_1 ja X_2 kaksi riippumatonta ja samoin jakautunutta satunnaismuuttujaa yhteisenä jakaumanaan $\text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Määritellään uusi satunnaismuuttuja Z näiden summana:

$$Z = X_1 + X_2.$$

- a) Määrää satunnaismuuttujan Z arvojoukko, tiheysfunktio, kertymäfunktio, odotusarvo ja varianssi.
- b) Laske lisäksi hajonta ja variaatiokerroin tapauksessa $\lambda = 1$.

(*Ohje:* Laske ensin Z :n kertymäfunktio lähtien kaavasta $P\{Z \leq z\} = \int_0^z P\{X_1 \in dx, X_2 \leq z - x\}$ ja hyödyntäen muuttujien välistä riippumattomuutta. Tiheysfunktion saat kertymäfunktioita derivoimalla. Varianssia laskettaessa voi hyödyntää muuttujien välistä riippumattomuutta.)

2. Tarkastellaan puhdasta menetysjärjestelmää, jossa on kaksi rinnakkaista palvelinta. Kummankin palvelimen palvelunopeus on $\mu > 0$. Palveluajat oletetaan riippumattomiksi ja eksponentiaalisesti jakautuneiksi (intensiteettinä siis μ). Oletetaan, että hetkellä 0 tyhjään systeemiin saapuu kaksi asiakasta, joita aletaan heti palvella. Tämän jälkeen systeemiin ei saavu uusia asiakkaita. Merkitään T :llä sitä (satunnaista) hetkeä, jolloin systeemi tulee taas tyhjäksi (eli viimeisenkin asiakkaan palvelu päättyy). Mikä on satunnaismuuttujan T odotusarvo?

3. *Kotitehtävä* (deadline 6.3. klo 9.00):

Tarkastellaan puhdasta jonotusjärjestelmää, jossa on kaksi rinnakkaista palvelinta, nopea ja hidas. Asiakkaan palveluaika nopealla palvelimella on eksponentiaalisesti jakautunut odotusarvonaan $1/(2\mu)$, kun taas hitaalla palvelimella palveluaika on eksponentiaalisesti jakautunut odotusarvonaan $1/\mu$. Palveluajat oletetaan toisistaan riippumattomiksi. Jos asiakas tulee tyhjään systeemiin, hän pääsee nopeaan palvelimeen. Jos nopea palvelin on käytössä, mutta hidas vapaana, saapuva asiakas joutuu hitaaseen palvelimeen. Muissa tapauksissa asiakas joutuu jonon päähän odottamaan muiden asiakkaiden palvelun päättymistä. Aina kun asiakkaan palvelu päättyy (kummalla tahansa palvelimella) ja jonossa on odottavia asiakkaita, otetaan jonossa ensimmäisenä odottava palveluun ko. palvelimella.

- a) Oletetaan ensin, että uuden asiakkaan saapuessa systeemissä on vain yksi asiakas, joka on ollut palveltavana nopeassa palvelimessa jo x minuuttia. Palvelimista nopeampi on siis varattuna ja hitaampi vapaana, joten uutta asiakasta ruvetaan heti palvelemaan hitaalla palvelimella. Millä todennäköisyydellä uusi asiakas poistuu järjestelmästä viimeisenä?

- b) Oletetaan sitten, että uuden asiakkaan saapuessa systeemissä onkin kaksi asiakasta, joita kumpaakin on jo palveltu x minuuttia. Kumpikin palvelin on siis varattuna, joten uuden asiakkaan palvelu aloitetaan vasta, kun jompikumpi palvelimista vapautuu. Millä todennäköisyydellä uusi asiakas poistuu järjestelmästä viimeisenä?

(*Ohje:* Hyödynnä eksponenttijakauman unohtavaisuusominaisuutta.)