# 5. Todennäköisyyslaskennan kertausta

# Sisältö

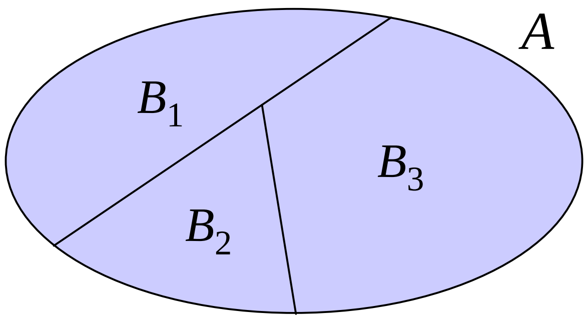
- Peruskäsitteet
- Diskreetit satunnaismuuttujat
- Diskreetit jakaumat (lkm-jakaumat)
- Jatkuvat satunnaismuuttujat
- Jatkuvat jakaumat (aikajakaumat)
- Muut satunnaismuuttujat

# Otosavaruus, alkeistapaus, tapahtuma

- **Otosavaruus** $\Omega$ (sample space) on kaikkien mahdollisten **alkeis-tapausten** $\omega$ (sample) muodostama joukko, $\omega \in \Omega$
  - **Esim. 0**. Rahanheitto: $\Omega = \{H,T\}$
  - **Esim. 1**. Nopanheitto: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
  - **Esim. 2**. Asiakkaiden lkm jonossa: $\Omega = \{0,1,2,...\}$
  - **Esim. 3**. Asiakkaan palveluaika (esim. minuutteina): $\Omega = \{x \in \Re \mid x > 0\}$
- **Tapahtumat** $A,B,C,...$ (events) ovat otosavaruuden $\Omega$ mitallisia osajoukkoja, $A,B,C,... \subset \Omega$
  - **Esim. 1**. “Nopanheitossa parillinen luku”: $A = \{2,4,6\}$
  - **Esim. 2**. “Jono tyhjä”: $A = \{0\}$
  - **Esim. 3**. “Asiakkaan palvelu kestää yli 3 minuuttia”: $A = \{x \in \Re \mid x > 3.0\}$
- Merkitään $\mathcal{F}$:llä kaikkien tapahtumien $A$ joukkoa, $A \in \mathcal{F}$
  - **Varma tapahtuma**: otosavaruus $\Omega \in \mathcal{F}$ itse
  - **Mahdoton tapahtuma**: tyhjä joukko $\emptyset \in \mathcal{F}$

# Tapahtumien yhdistely

- **Yhdiste** (union) “A tai B”: $A \cup B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ tai } \omega \in B\}$
- **Leikkaus** (intersection) “A ja B”: $A \cap B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ ja } \omega \in B\}$
- **Komplementti** (complement) “ei A”: $A^c = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$
- Tapahtumat $A$ ja $B$ ovat **toistensa poissulkevia** (disjoint), jos
  - $A \cap B = \emptyset$
- Kokoelma tapahtumia $\{B_1, B_2, \ldots\}$ muodostaa tapahtuman $A$ **osituksen** (partition), jos
  - $(i)$ $B_i \cap B_j = \emptyset$ kaikilla $i \neq j$
  - $(ii)$ $\cup_i B_i = A$



# Todennäköisyys

- Tapahtuman $A$ **todennäköisyyttä** (tn, probability) merkitään $P(A)$:lla, $P(A) \in [0,1]$
  - Todennäköisyysmitta $P$ on siis ns. joukkofunktio, $P\colon \mathcal{F} \to [0,1]$
- **Ominaisuuksia**:
  - $(i)$ $0 \le P(A) \le 1$
  - $(ii)$ $P(\emptyset) = 0$
  - $(iii)$ $P(\Omega) = 1$
  - $(iv)$ $P(A^c) = 1 - P(A)$
  - $(v)$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  - $(vi)$ $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
  - $(vii)$ kokoelma $\{B_i\}$ on tapahtuman $A$ ositus $\Rightarrow P(A) = \Sigma_i P(B_i)$
  - $(\mathrm{v}iii)$ $A \subset B \Rightarrow P(A) \le P(B)$

# Ehdollinen todennäköisyys

- Oletetaan, että tapahtumalle $B$: $P(B) > 0$
- **Määr**. Tapahtuman $A$ **ehdollinen todennäköisyys** (conditional probability) ehdolla $B$ on

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Seuraus:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B) = P(A)P(B \mid A)$$

# Kokonaistodennäköisyyden kaava

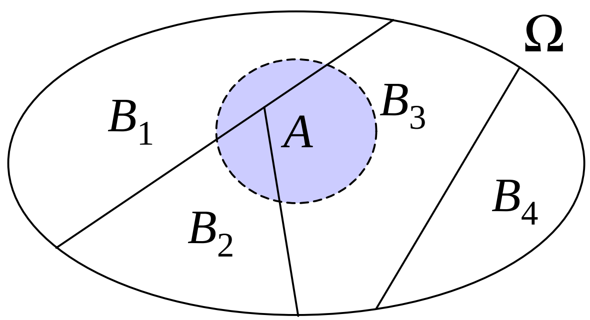
- Olkoon kokoelma $\{B_i\}$ otosavaruuden $\Omega$ ositus
- Tällöin kokoelma $\{A \cap B_i\}$ on tapahtuman $A$ ositus, joten (kts. kalvo 5)

$$P(A) \overset{(vii)}{=} \sum_i P(A \cap B_i)$$

- Oletaan lisäksi, että $P(B_i) > 0$ kaikilla $i$. Tällöin (kts. kalvo 6)

$$P(A) = \sum_i P(B_i) P(A \mid B_i)$$

- Tätä kutsutaan **kokonaistodennäköisyyden kaavaksi**



# Bayesin kaava

- Olkoon kokoelma $\{B_i\}$ otosavaruuden $\Omega$ ositus
- Oletetaan, että $P(A) > 0$ ja $P(B_i) > 0$ kaikilla $i$. Tällöin (kts. kalvo 6)

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$$

- Näin ollen, kokonaistodennäköisyyden kaavan nojalla (kts. kalvo 7),

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_j P(B_j)P(A|B_j)}$$

- Tätä kutsutaan **Bayesin kaavaksi**
  – tn:ksiä $P(B_i)$ kutsutaan tapahtumien $B_i$ ***a priori*** todennäköisyyksiksi
  – tn:ksiä $P(B_i|A)$ taas sanotaan tapahtumien $B_i$ ***a posteriori*** todennäköisyyk-siksi (ehdolla, että tapahtuma $A$ tapahtui)

# Tilastollinen riippumattomuus

- **Määr**. Tapahtumat $A$ ja $B$ ovat **riippumattomia** (independent), jos

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

- Seuraus:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

- Vastaavasti:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B)$$

# Satunnaismuuttujat

- **Määr**. Reaaliarvoinen **satunnaismuuttuja** $X$ (sm, random variable) on mitallinen kuvaus otosavaruudesta $\Omega$ reaalilukujen joukkoon $\Re$, $X\colon \Omega \to \Re$
  - jokaiseen alkeistapaukseen $\omega \in \Omega$ liitetään reaaliluku $X(\omega)$
- **Mitallisuus** (measurability) tarkoittaa, että kaikki tyyppiä

$$\{X \le x\} := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le x\} \subset \Omega$$

olevat otosavaruuden joukot kuuluvat tapahtumien joukkoon $\mathcal{F}$, ts.

$$\{X \le x\} \in \mathcal{F}$$

- Tapahtuman "$X \le x$" tn on siten $P\{X \le x\}$

# Esimerkki

- Rahaa heitetään kolme kertaa peräkkäin
- Otosavaruus:

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \mid \omega_i \in \{\mathrm{H}, \mathrm{T}\}, i = 1,2,3\}$$

- Olkoon $X$ satunnaismuuttuja, joka kertoo klaavojen (T = tails) lkm:n näissä kolmessa heitossa:

| ω | HHH | HHT | HTH | THH | HTT | THT | TTH | TTT |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X(\omega)$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |

# Tapahtuman indikaattori

- Olkoon $A \in \mathcal{F}$ mielivaltainen tapahtuma
- **Määr**. Satunnaismuuttujaa $1_A$, joka määritellään kaavalla

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$$

sanotaan tapahtuman $A$ **indikaattoriksi** (indicator)

- Selvästikin:

$$P\{1_A = 1\} = P(A)$$

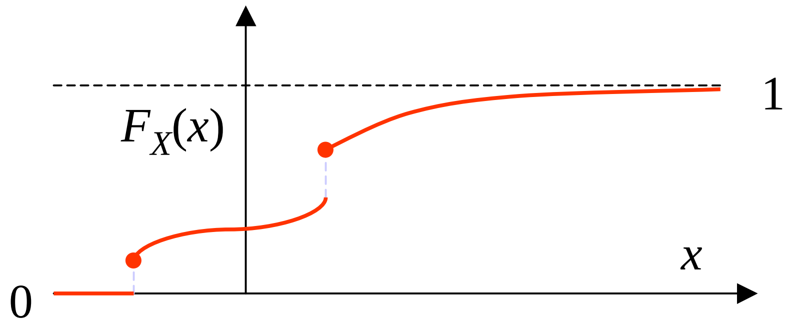
$$P\{1_A = 0\} = P(A^c) = 1 - P(A)$$

# Kertymäfunktio

- **Määr**. Sm:n $X$ **kertymäfunktio** (kf, cumulative distribution function) on kuvaus $F_X$: $\Re \to [0,1]$, joka määritellään kaavalla

$$F_X(x) = P\{X \leq x\}$$

- Kf määrää täydellisesti ko. sm:n **jakauman** (distribution)
  - so. tn:t $P\{X \in B\}$, missä $B \subset \Re$ ja $\{X \in B\} \in \mathcal{F}$
- **Ominaisuuksia**:
  - $(i)$ $F_X$ on kasvava
  - $(ii)$ $F_X$ on oikealta jatkuva
  - $(iii)$ $F_X(-\infty) = 0$
  - $(iv)$ $F_X(\infty) = 1$



# Satunnaismuuttujien tilastollinen riippumattomuus

- **Määr**. Sm:t $X$ ja $Y$ ovat **riippumattomia**, jos kaikilla $x$ ja $y$

$$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\} P\{Y \le y\}$$

- **Määr**. Sm:t $X_1, \ldots, X_n$ ovat **täydellisesti riippumattomia**, jos kaikilla $i$ ja $x_i$

$$P\{X_1 \le x_1, \ldots, X_n \le x_n\} = P\{X_1 \le x_1\} \cdots P\{X_n \le x_n\}$$

# Riippumattomien satunnaismuuttujien maksimi ja minimi

- Olkoot sm:t $X_1, \ldots, X_n$ **täydellisesti riippumattomia**
- Merkitään $X^{\max} := \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
P\{X^{\max} \le x\} &= P\{X_1 \le x, \ldots, X_n \le x\} \\
&= P\{X_1 \le x\} \cdots P\{X_n \le x\}
\end{aligned}
$$

- Merkitään $X^{\min} := \min\{X_1, \ldots, X_n\}$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
P\{X^{\min} > x\} &= P\{X_1 > x, \ldots, X_n > x\} \\
&= P\{X_1 > x\} \cdots P\{X_n > x\}
\end{aligned}
$$

# Sisältö

- Peruskäsitteet
- Diskreetit satunnaismuuttujat
- Diskreetit jakaumat (lkm-jakaumat)
- Jatkuvat satunnaismuuttujat
- Jatkuvat jakaumat (aikajakaumat)
- Muut satunnaismuuttujat

# Diskreetit satunnaismuuttujat

- **Määr**. Joukkoa $A \subset \Re$ sanotaan **diskreetiksi** (discrete), jos se on
  - äärellinen, $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$, tai
  - numeroituvasti ääretön, $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$.
- **Määr**. Sm $X$ on **diskreetti**, jos on olemassa sellainen diskreetti joukko $S_X \subset \Re$, että

$$P\{X \in S_X\} = 1$$

- Seuraus:
  - $P\{X = x\} \geq 0$ kaikilla $x \in S_X$
  - $P\{X = x\} = 0$ kaikilla $x \notin S_X$
- Joukkoa $S_X$ sanotaan sm:n $X$ **arvojoukoksi**

# Pistetodennäköisyysfunktio

- Olkoon sm $X$ diskreetti
- Sm:n $X$ jakauman määräävät **pistetodennäköisyydet** $p_i$,

$$p_i := P\{X = x_i\}, \quad x_i \in S_X$$

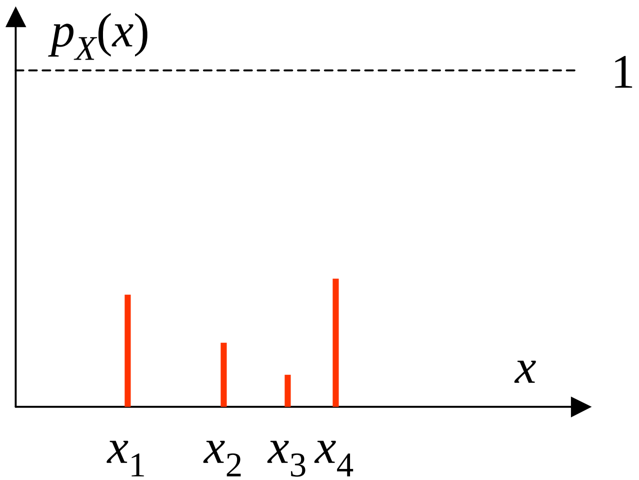
- **Määr**. Sm:n $X$ **pistetodennäköisyysfunktio** (ptnf, probability mass function) $p_X$: $\Re \rightarrow [0,1]$ määritellään kaavalla

$$p_X(x) := P\{X = x\} = \begin{cases} p_i, & x = x_i \in S_X \\ 0, & x \notin S_X \end{cases}$$

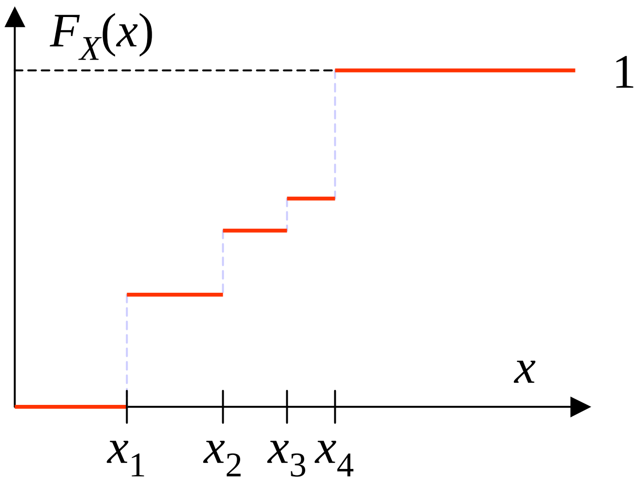
- Kf on tässä tapauksessa seuraava porrasfunktio:

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = \sum_{i: x_i \le x} p_i$$

# Esimerkki




pistetodennäköisyysfunktio (ptnf)




kertymäfunktio (kf)

$$S_X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

# Diskreettien satunnaismuuttujien riippumattomuus

- Diskreetit sm:t $X$ ja $Y$ ovat riippumattomia, jos ja vain jos kaikilla $x_i \in S_X$ ja $y_j \in S_Y$

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\}$$

# Odotusarvo

- **Määr**. Sm:n $X$ **odotusarvo** (mean, expectation) määritellään kaavalla

$$\mu_X := E[X] := \sum_{x \in S_X} P\{X = x\} \cdot x = \sum_{x \in S_X} p_X(x) x = \sum_i p_i x_i$$

  - Huom. 1. Odotusarvo on (hyvin) määritelty vain, jos $\sum_i p_i |x_i| < \infty$
  - Huom. 2. Jos $x_i \geq 0$ ja $\sum_i p_i x_i = \infty$, niin voidaan merkitä $E[X] = \infty$

- **Ominaisuuksia**:
  - $(i)$ $c \in \Re \Rightarrow E[cX] = cE[X]$
  - $(ii)$ $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$
  - $(iii)$ $X$ ja $Y$ riippumattomia $\Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y]$

# Varianssi

- **Määr**. Sm:n $X$ **varianssi** (variance) määritellään kaavalla

$$\sigma_X^2 := D^2[X] := \mathrm{Var}[X] := E[(X - E[X])^2]$$

- Kätevä kaava (todista!):

$$D^2[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

- **Ominaisuuksia**:
  - $(i)$ $c \in \Re \Rightarrow D^2[cX] = c^2 D^2[X]$
  - $(ii)$ $X$ ja $Y$ riippumattomia $\Rightarrow D^2[X+Y] = D^2[X] + D^2[Y]$

# Kovarianssi

- **Määr**. Sm:ien $X$ ja $Y$ välinen **kovarianssi** (covariance) määr. kaavalla

$$\sigma_{XY}^2 := \mathrm{Cov}[X,Y] := E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

- Kätevä kaava (todista!):

$$\mathrm{Cov}[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

- **Ominaisuuksia**:
  - ($i$) $\mathrm{Cov}[X,X] = \mathrm{Var}[X]$
  - ($ii$) $\mathrm{Cov}[X,Y] = \mathrm{Cov}[Y,X]$
  - ($iii$) $\mathrm{Cov}[X+Y,Z] = \mathrm{Cov}[X,Z] + \mathrm{Cov}[Y,Z]$
  - ($iv$) $X$ ja $Y$ riippumattomia $\Rightarrow \mathrm{Cov}[X,Y] = 0$

# Muita jakaumaan liittyviä tunnuslukuja

- **Määr**. Sm:n $X$ **hajonta** (standard deviation):

$$\sigma_X := D[X] := \sqrt{D^2[X]}$$

- **Määr**. Sm:n $X$ **variaatiokerroin** (coefficient of variation):

$$c_X := C[X] := \frac{D[X]}{E[X]}$$

- **Määr**. Sm:n $X$ $k$:s **momentti** (moment), $k = 1,2,\ldots$:

$$\mu_X^{(k)} := E[X^k]$$

# Riippumattomien satunnaismuuttujien keskiarvo

- Olkoot sm:t $X_1, \ldots, X_n$ riippumattomia ja samoin jakautuneita (IID) odotusarvonaan $\mu$ ja varianssinaan $\sigma^2$
- Merkitään näiden sm:ien keskiarvoa (sample mean) seuraavasti:

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

- Tällöin (todista!)

$$E[\overline{X}_n] = \mu$$

$$D^2[\overline{X}_n] = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$D[\overline{X}_n] = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

# Suurten lukujen laki (SLL)

- Olkoot sm:t $X_1,\ldots, X_n$ riippumattomia ja samoin jakautuneita (IID) odotusarvonaan $\mu$ ja varianssinaan $\sigma^2$
- **Heikko suurten lukujen laki**: kaikilla $\varepsilon > 0$

$$P\{|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon\} \to 0$$

- **Vahva suurten lukujen laki**: todennäköisyydellä 1

$$\bar{X}_n \to \mu$$

# Sisältö

- Peruskäsitteet
- Diskreetit satunnaismuuttujat
- Diskreetit jakaumat (lkm-jakaumat)
- Jatkuvat satunnaismuuttujat
- Jatkuvat jakaumat (aikajakaumat)
- Muut satunnaismuuttujat

# Bernoulli-jakauma

$$X \sim \text{Bernoulli}(p), \quad p \in (0,1)$$

- kuvaa yksittäistä satunnaiskoetta, jonka tuloksena joko **onnistuminen** (1) tai **epäonnistuminen** (0); vrt. rahanheitto
- onnistuminen tn:llä $p$ (ja epäonnistuminen tn:llä $1 - p$)

- Arvojoukko: $S_X = \{0,1\}$
- Pistetodennöisyydet:

$$P\{X = 0\} = 1 - p, \quad P\{X = 1\} = p$$

- Odotusarvo: $E[X] = (1 - p)\cdot 0 + p\cdot 1 = p$
- Toinen momentti: $E[X^2] = (1 - p)\cdot 0^2 + p\cdot 1^2 = p$
- Varianssi: $D^2[X] = E[X^2] - E[X]^2 = p - p^2 = p(1 - p)$

# Binomijakauma

$$X \sim \mathrm{Bin}(n, p), \quad n \in \{1,2,...\}, p \in (0,1)$$

- onnistumisten lkm $n$:ssä perättäisessä ja toisistaan riippumattomassa satunnaiskokeessa; $X = X_1 + \ldots + X_n$ (missä $X_i \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$)
- $n$ = satunnaiskokeiden lkm
- $p$ = onnistumisen tn yksittäisessä satunnaiskokeessa

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$$

- Arvojoukko: $S_X = \{0,1,\ldots,n\}$
- Pistetodennäköisyydet:

$$P\{X = i\} = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

- Odotusarvo: $E[X] = E[X_1] + \ldots + E[X_n] = np$
- Varianssi: $D^2[X] = D^2[X_1] + \ldots + D^2[X_n] = np(1-p)$ riippumattomuus!

# Geometrinen jakauma

$$X \sim \mathrm{Geom}(p), \quad p \in (0,1)$$

- peräkkäisten onnistumisten lkm ennen ensimmäistä epäonnistumista (sarjassa peräkkäisiä ja toisistaan riippumattomia satunnaiskokeita)
- $p$ = onnistumisen tn yksittäisessä satunnaiskokeessa

- Arvojoukko: $S_X = \{0,1,\ldots\}$
- Pistetodennäköisyydet:

$$P\{X = i\} = p^i(1-p)$$

- Odotusarvo: $E[X] = \sum_i ip^i(1-p) = p/(1-p)$
- Toinen momentti: $E[X^2] = \sum_i i^2p^i(1-p) = 2(p/(1-p))^2 + p/(1-p)$
- Varianssi: $D^2[X] = E[X^2] - E[X]^2 = p/(1-p)^2$

# Geometrisen jakauman unohtavaisuusominaisuus

- Geometrisella jakaumalla on ns. **unohtavaisuusominaisuus** (memoryless property): kaikilla $i,j \in \{0,1,...\}$

$$P\{X \geq i + j \mid X \geq i\} = P\{X \geq j\}$$

- Todista!
  - *Ohje*: Todista ensin, että $P\{X \geq i\} = p^i$

# Geometrisesti jakautuneiden satunnaismuuttujien minimi

- Olkoot sm:t $X_1 \sim \mathrm{Geom}(p_1)$ ja $X_2 \sim \mathrm{Geom}(p_2)$ **riippumattomia**
- Tällöin

$$X^{\min} := \min\{X_1, X_2\} \sim \mathrm{Geom}(p_1 p_2)$$

ja

$$P\{X^{\min} = X_i\} = \frac{1 - p_i}{1 - p_1 p_2}, \quad i \in \{1,2\}$$

- Todista!
  - *Ohje*: Kts. kalvo 15

# Poisson-jakauma

$$X \sim \mathrm{Poisson}(a), \quad a > 0$$

– binomijakauman rajatapaus, kun $n \to \infty$ ja $p \to 0$ siten, että $np \to a$

- Arvojoukko: $S_X = \{0,1,\ldots\}$
- Pistetodennäköisyydet:

$$P\{X = i\} = \frac{a^i}{i!} e^{-a}$$

- Odotusarvo: $E[X] = a$
- Toinen momentti: $E[X(X-1)] = a^2 \Rightarrow E[X^2] = a^2 + a$
- Varianssi: $D^2[X] = E[X^2] - E[X]^2 = a$

# Esimerkki

- Oletetaan, että
  - paikalliskeskukseen on kytkettynä 200 tilaajaa
  - yksittäisen tilaajan ominaisliikenne on 0.01 erlangia
  - tilaajat toimivat toisistaan riippumattomasti
- Tällöin käynnissäolevien puhelujen lkm $X \sim \mathrm{Bin}(200{,}0.01)$
- Vastaava Poisson-approksimaatio: $X \approx \mathrm{Poisson}(2.0)$
- Pistetodennäköisyyksien vertailua:

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Bin(200,0.01) | .1326 | .2679 | .2693 | .1795 | .0893 | .0354 |
| Poisson(2.0) | .1353 | .2701 | .2701 | .1804 | .0902 | .0361 |

# Poisson-jakauman ominaisuuksia

- ($i$) **Summa**: Olkoot sm:t $X_1 \sim \mathrm{Poisson}(a_1)$ ja $X_2 \sim \mathrm{Poisson}(a_2)$ riippumattomia. Tällöin

$$X_1 + X_2 \sim \mathrm{Poisson}(a_1 + a_2)$$

- ($ii$) **Satunnaisotanta**: Olkoon $X \sim \mathrm{Poisson}(a)$ alkioiden lkm (jossakin satunnaisen kokoisessa joukossa). Valitaan näistä alkioista satunnainen osajoukko (jokainen yksittäinen alkio otetaan mukaan tn:llä $p$), jonka kokoa merkitään $Y$:llä. Tällöin

$$Y \sim \mathrm{Poisson}(pa)$$

- ($iii$) **Satunnaislajittelu**: Olkoot sm:t $X$ ja $Y$ kuten yllä. Merk. $Z = X - Y$. Tällöin $Y$ ja $Z$ ovat **riippumattomia** (ehdolla, että $X$:ää ei tunneta),

$$Y \sim \mathrm{Poisson}(pa) \quad \text{ja} \quad Z \sim \mathrm{Poisson}((1-p)a)$$

# Sisältö

- Peruskäsitteet
- Diskreetit satunnaismuuttujat
- Diskreetit jakaumat (lkm-jakaumat)
- Jatkuvat satunnaismuuttujat
- Jatkuvat jakaumat (aikajakaumat)
- Muut satunnaismuuttujat

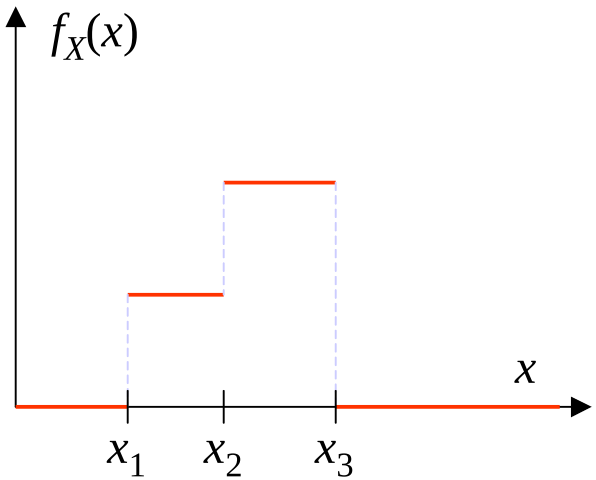
# Jatkuvat satunnaismuutujat

- **Määr**. Sm $X$ on **jatkuva** (continuous), jos on olemassa sellainen integroituva funktio $f_X$: $\Re \to \Re_+$, että kaikilla $x \in \Re$ pätee

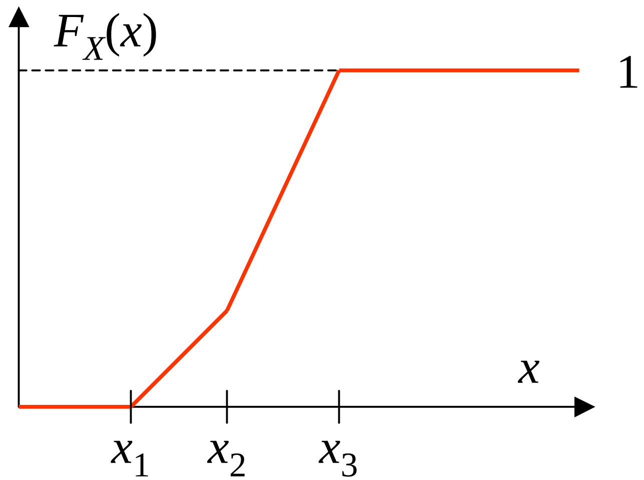
$$F_X(x) := P\{X \le x\} = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy$$

- Funktiota $f_X$ sanotaan sm:n $X$ **tiheysfunktioksi** (tf, probability density function)
  - Joukkoa $S_X$, missä $f_X > 0$, sanotaan sm:n $X$ **arvojoukoksi**
- **Ominaisuuksia**:
  - $(i)$ $P\{X = x\} = 0$ kaikilla $x \in \Re$
  - $(ii)$ $P\{a < X < b\} = P\{a \le X \le b\} = \int_a^b f_X(x)\,dx$
  - $(iii)$ $P\{X \in A\} = \int_A f_X(x)\,dx$
  - $(iv)$ $P\{X \in \Re\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_{S_X} f_X(x)\,dx = 1$

# Esimerkki




tiheysfunktio (tf)




kertymäfunktio (kf)

$$S_X = (x_1, x_3)$$

# Odotusarvo ja muita jakaumaan liittyviä tunnuslukuja

- **Määr**. Sm:n $X$ **odotusarvo** (mean) määritellään kaavalla

$$\mu_X := E[X] := \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)x\,dx$$

  - Huom. 1. Odotusarvo on (hyvin) määritelty vain, jos $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)|x|\,dx < \infty$
  - Huom. 2. Jos $S_X = \Re_+$ ja $\int_0^{\infty} f_X(x)x = \infty$, niin voidaan merkitä $E[X] = \infty$
  - Jatkuvan sm:n odotusarvolla on samat ominaisuudet kuin diskreetin sm:n odotusarvolla (kts. kalvo 21)
- Muut jakaumaan liittyvät tunnusluvut (varianssi, kovarianssi,...) määritellään odotusarvon avulla täsmälleen samoin kuin diskreetin sm:n tapauksessa
  - Näin ollen myös näiden tunnuslukujen ominaisuudet säilyvät (kts. kalvot 22-24)

# Sisältö

- Peruskäsitteet
- Diskreetit satunnaismuuttujat
- Diskreetit jakaumat (lkm-jakaumat)
- Jatkuvat satunnaismuuttujat
- Jatkuvat jakaumat (aikajakaumat)
- Muut satunnaismuuttujat

# Tasajakauma

$$X \sim \mathrm{U}(a,b), \quad a < b$$

– jatkuva vastine nopanheitolle (kaikki arvot “yhtä todennäköisiä”)

- Arvojoukko: $S_X = (a,b)$
- Tiheysfunktio (tf):

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}, \quad x \in (a,b)$$

- Kertymäfunktio (kf):

$$F_X(x) := P\{X \leq x\} = \frac{x-a}{b-a}, \quad x \in (a,b)$$

- Odotusarvo: $E[X] = \int_a^b x/(b-a)\,dx = (a+b)/2$
- Toinen momentti: $E[X^2] = \int_a^b x^2/(b-a)\,dx = (a^2 + ab + b^2)/3$
- Varianssi: $D^2[X] = E[X^2] - E[X]^2 = (b-a)^2/12$

# Eksponenttijakauma

$$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda), \quad \lambda > 0$$

– geometrisen jakauman jatkuva vastine ("epäonnistuminen" tn:llä $\approx \lambda dt$)

- Arvojoukko: $S_X = (0,\infty)$
- Tiheysfunktio (tf):

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

- Kertymäfunktio (kf):

$$F_X(x) := P\{X \le x\} = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

- Odotusarvo: $E[X] = \int_0^\infty \lambda x \exp(-\lambda x)\, dx = 1/\lambda$
- Toinen momentti: $E[X^2] = \int_0^\infty \lambda x^2 \exp(-\lambda x)\, dx = 2/\lambda^2$
- Varianssi: $D^2[X] = E[X^2] - E[X]^2 = 1/\lambda^2$

# Eksponenttijakauman unohtavaisuusominaisuus

- Eksponenttijakaumalla on ns. **unohtavaisuusominaisuus** (memoryless property): kaikilla $x,y \in (0,\infty)$

$$P\{X > x + y \mid X > x\} = P\{X > y\}$$

- Todista!
  - *Ohje*: Todista ensin, että $P\{X > x\} = e^{-\lambda x}$

- Sovellus:
  - Oletetaan, että puhelujen pitoajat ovat eksponentiaalisesti jakautuneita odotusarvonaan $h$ minuuttia.
  - Tarkastellaan puhelua, joka on jo kestänyt ajan $x$ minuuttia. Unohtavaisuusominaisuuden nojalla tällä ei ole mitään merkitystä puhelun jäljellä olevan keston kannalta: keskimäärin tällainen puhelu kestää vielä $h$ minuuttia (siis $x + h$ minuuttia kaikenkaikkiaan)!

# Eksponentiaalisesti jakautuneiden satunnaismuuttujien minimi

- Olkoot sm:t $X_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1)$ ja $X_2 \sim \mathrm{Exp}(\lambda_2)$ **riippumattomia**.
- Tällöin

$$X^{\min} := \min\{X_1, X_2\} \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

ja

$$P\{X^{\min} = X_i\} = \frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2}, \quad i \in \{1,2\}$$

- Todista!
  - *Ohje*: Kts. kalvo 15

# Normeerattu normaalijakauma

$$X \sim \mathrm{N}(0,1)$$

- riippumattomien ja samoin jakautuneiden (odotusarvona 0 ja varianssina 1) sm:ien “normeeratun” summan rajatapaus (kts. kalvo 48)

- Arvojoukko: $S_X = (-\infty,\infty)$
- Tiheysfunktio (tf):

$$f_X(x) = \varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

- Kertymäfunktio (kf):

$$F_X(x) := P\{X \le x\} = \Phi(x) := \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)\,dy$$

- Odotusarvo: $E[X] = 0$   (tf symmetrinen!)
- Varianssi: $D^2[X] = 1$

# Normaalijakauma

$$X \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2), \quad \mu \in \Re, \quad \sigma > 0$$

– jos $(X - \mu)/\sigma \sim \mathrm{N}(0,1)$

- Arvojoukko: $S_X = (-\infty,\infty)$
- Tiheysfunktio (tf):

$$f_X(x) := F_X{}'(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

- Kertymäfunktio (kf):

$$F_X(x) := P\{X \le x\} = P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

- Odotusarvo: $E[X] = \mu + \sigma E[(X-\mu)/\sigma] = \mu$ (tf symmetr. $\mu$:n suhteen)
- Varianssi: $D^2[X] = \sigma^2 D^2[(X-\mu)/\sigma] = \sigma^2$

# Normaalijakauman ominaisuuksia

- ($i$) **Lineaarimuunos**: Olk. $X \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ ja $\alpha,\beta \in \Re$. Tällöin

$$Y := \alpha X + \beta \sim \mathrm{N}(\alpha\mu + \beta, \alpha^2\sigma^2)$$

- ($ii$) **Summa**: Olkoot sm:t $X_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1,\sigma_1^2)$ ja $X_2 \sim \mathrm{N}(\mu_2,\sigma_2^2)$ **riippumattomia**. Tällöin

$$X_1 + X_2 \sim \mathrm{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

- ($iii$) **Otoskeskiarvo**: Olkoot sm:t $X_i \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$, $i = 1,\ldots n$, **riippumattomia ja samoin jakautuneita** (IID) noudattaen normaalijakaumaa. Tällöin

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \tfrac{1}{n}\sigma^2)$$

# Keskeinen raja-arvolause (KRL)

- Olkoot sm:t $X_1,\ldots, X_n$ **riippumattomia ja samoin jakautuneita** (IID) odotusarvonaan $\mu$ ja varianssinaan $\sigma^2$ (ja lisäksi kolmas momentti olemassa)
- **Keskeinen raja-arvolause**:

$$\frac{1}{\sigma/\sqrt{n}}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{\text{i.d.}} \mathrm{N}(0,1)$$

- Seuraus:

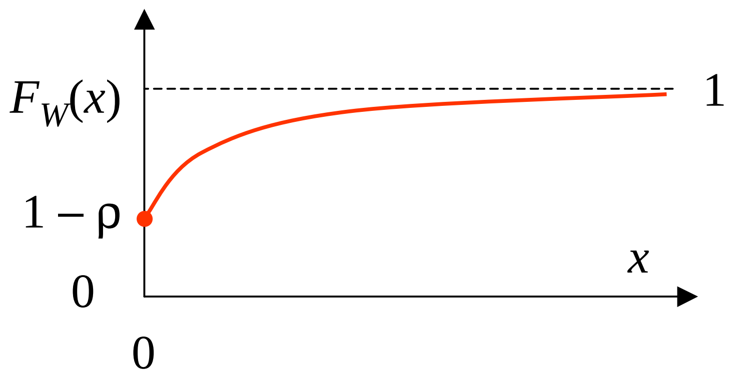
$$\bar{X}_n \approx \mathrm{N}(\mu, \tfrac{1}{n}\sigma^2)$$

# Sisältö

- Peruskäsitteet
- Diskreetit satunnaismuuttujat
- Diskreetit jakaumat (lkm-jakaumat)
- Jatkuvat satunnaismuuttujat
- Jatkuvat jakaumat (aikajakaumat)
- Muut satunnaismuuttujat

# Muita satunnaismuuttujia

- Puhtaasti diskreettien ja jatkuvien sm:ien lisäksi on olemassa näiden sekamuotoja
- Esimerkki:
  - Merk. $W$:llä asiakkaan odotusaikaa M/M/1 jonossa. Sm:n $W$ jakaumalla on ns. atomi nollassa (ts. $P\{W = 0\} = 1 - \rho > 0$), mutta muuten jakauma on jatkuva



# Sanastoa

- otosavaruus = sample space
- tapahtuma = event
- todennäköisyys = probability
- ehdollinen tn = conditional probability
- riippumattomuus = independence
- satunnaismuuttuja = random variable
- indikaattori = indicator
- jakauma = distribution
- kertymäfunktio = cumulative distribution function
- diskreetti = discrete
- pistetodennäköisyysfunktio = probability mass function
- odotusarvo = mean (value) = expectation
- varianssi = variance
- kovarianssi = covariance
- hajonta = standard deviation
- variaatiokerroin = coefficient of variation
- suurten lukujen laki = law of large numbers
- jatkuva = continuous
- tiheysfunktio = probability density function
- unohtavaisuusominaisuus = memoryless property
- keskeinen raja-arvolause = central limit theorem

# THE END