6. Stokastiset prosessit

Sisältö

Stokastiset prosessit (1)

- Tarkastellaan jotakin (liikenneteorian kannalta tai sitten muuten) kiinnostavaa järjestelmää kuvaavaa suuretta
- Tyypillisesti se **kehittyy** ajan myötä **satunnaisesti**
  - Esim. 1. varattujen kanavien lkm puhelinverkon linkissä hetkellä t tai n:nnen asiakkaan saapuessa
  - Esim. 2. pakettien lkm tilastollisen kanavointilaitteen puskurissa hetkellä t tai n:nnen asiakkaan saapuessa
- **Stokastinen prosessi** kuvaa tällaista ajan myötä satunnaisesti tapahtuvaa kehitystä
  - Millä tahansa yksittäisellä hetkellä t (tai n) järjestelmää kuvaa yksittäinen satunnaismuuttuja
  - Näin ollen stokastinen prosessi voidaan määritellä kokoelmaksi satunnaismuuttujia

Stokastiset prosessit (2)

- **Määr**. Reaaliarvoinen **stokastinen prosessi** $X = (X_t \mid t \in I)$ (stochastic process) on kokoelma satunnaismuuttujia X_t,
  - jotka saavat arvoja jossakin reaalilukujen osajoukossa S, $X_t(\omega) \in S$, ja
  - joita indeksoi reaaliarvoinen (aikaa kuvaava) parametri $t \in I$.
- Stokastisia prosesseja kutsutaan joskus myös **satunnaisprosesseiksi** (random process) tai lyhyesti **prosesseiksi**
- Indeksijoukkoa $I \subset \Re$ sanotaan prosessin **parametriavaruudeksi** (parameter space)
- Arvojoukkoa $S \subset \Re$ taas sanotaan prosessin **tila-avaruudeksi** (state space)
- **Huom**. Usein merkinnällä X_t tarkoitetaan koko prosessia (eikä pelkästään yksittäistä, johonkin tiettyyn ajanhetkeen t liittyvää satunnaismuuttujaa)

Stokastiset prosessit (3)

- Jokainen yksittäinen satunnaismuuttuja X_t on kuvaus otosavaruudelta Ω reaalilukujen joukkoon $\Re$:

$$X_t : \Omega \to \Re, \quad \omega \mapsto X_t(\omega)$$

- Stokastisen prosessin X voidaan näin ollen ajatella olevan kuvauksen otosavaruudelta Ω reaaliarvoisten funktioiden joukkoon $\Re^I$ (argumenttinaan parametri $t \in I$):

$$X : \Omega \to \Re^I, \quad \omega \mapsto X(\omega)$$

- Jokaiseen alkeistapaukseen $\omega \in \Omega$ liittyy reaaliarvoinen funktio $X(\omega)$. Funktiota $X(\omega)$ kutsutaan prosessin **reaalisatioksi** (realization) [eli **poluksi** (path) eli **trajektoriksi** (trajectory)].

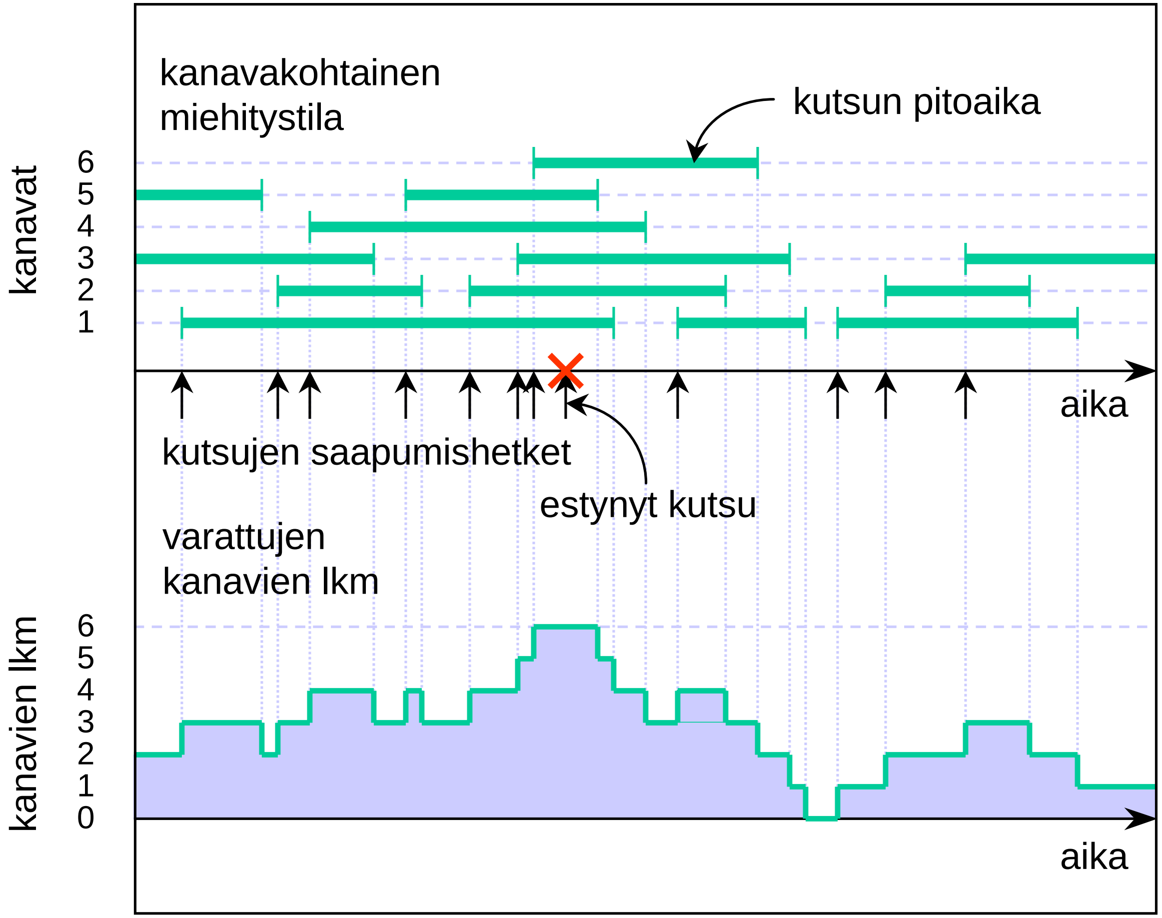
Yhteenveto

- Annetulla alkeistapauksella $\omega \in \Omega$
  - $X(\omega) = (X_t(\omega) \mid t \in I)$ on reaaliarvoinen funktio (argumenttinaan $t \in I$)
- Annetulla ajanhetkellä $t \in I$,
  - $X_t = (X_t(\omega) \mid \omega \in \Omega)$ on satunnaismuuttuja (kun $\omega \in \Omega$)
- Annetulla alkeistapauksella $\omega \in \Omega$ ja ajanhetkellä $t \in I$,
  - $X_t(\omega)$ on reaaliluku

Esimerkki

- Tarkastellaan liikenneprosessia $X = (X_t \mid t \in [0,T])$ kahden puhelinkeskuksen välisellä linkillä jollakin aikavälillä $[0,T]$
  - X_t kertoo varattujen kanavien lkm:n hetkellä t
- Alkeistapaus $\omega \in \Omega$ ilmaisee
  - mikä on varattujen kanavien lkm X_0 hetkellä 0,
  - mitkä ovat näiden X_0:n puhelun jäljelläolevat pitoajat,
  - millä ajanhetkillä saapuu uusia kutsuja, ja
  - mitkä ovat näiden uusien kutsujen pitoajat.
- Näiden tietojen perusteella on mahdollista konstruoida liikenneprosessin X reaalisaatio $X(\omega)$
  - Alkeistapaus ω siis sisältää kaiken prosessin kulkuun vaikuttavan satunnaisuuden
  - Annetulla alkeistapauksella ω prosessin reaalisaatio $X(\omega)$ on vain deterministinen reaaliarvoinen funktio

Liikenneprosessi



Prosessien luokittelusta

- Palautetaan mieliin:
  - Parametriavaruus = indeksijoukko I ($t \in I$)
  - Tila-avaruus = arvojoukko S ($X_t(\omega) \in S$)
- Luokitteluja:
  - Parametriavaruuden tyyppiin perustuva:
    - **Diskreettiaikaiset prosessit**: parametriavaruus diskreetti
    - **Jatkuva-aikaiset processes**: parametriavaruus jatkuva
  - Tila-avaruuden tyyppiin perustuva:
    - **Diskreettitilaiset prosessit**: tila-avaruus diskreetti
    - **Jatkuvatilaiset prosessit**: tila-avaruus jatkuva
- Tällä kurssilla keskitymme diskreettitilaisiin prosesseihin (jotka siis voivat olla diskreetti- tai jatkuva-aikaisia)
  - Tyypillinen prosessi kuvaa asiakkaiden lkm:ää jossakin jonosysteemissä (jolloin tila-avaruudeksi tulee $S = \{0,1,2,...\}$)

Esimerkkejä

- Diskreettiaikaisia ja diskreettitilaisia prosesseja
  - Esim. 1. varattujen kanavien lkm puhelinverkon linkissä n:nnen kutsun saapuessa, $n = 1,2,...$
  - Esim. 2. pakettien lkm tilastollisen kanavointilaitteen puskurissa n:nnen paketin saapuessa, $n = 1,2,...$
- Jatkuva-aikaisia ja diskreettitilaisia prosesseja
  - Esim. 3. varattujen kanavien lkm puhelinverkon linkissä hetkellä $t > 0$
  - Esim. 4. pakettien lkm tilastollisen kanavointilaitteen puskurissa hetkellä $t > 0$

Merkintöjä

- **Diskreettiaikaiselle prosessille**
  - parametriavaruus on tyypillisesti kaikkien positiivisten kokonaislukujen joukko, $I = \{1,2,\ldots\}$
  - indeksi t korvataan tällöin (usein) indeksillä n: X_n, $X_n(\omega)$

- **Jatkuva-aikaiselle prosessille**
  - parametriavaruus on tyypillisesti joko jokin äärellinen väli, $I = [0, T]$, tai sitten kaikkien ei-negatiivisten reaalilukujen joukko, $I = [0, \infty)$
  - indeksi t kirjoitetaan tällöin (usein) prosessia kuvaavan symbolin jälkeen sulkuihin (eikä alaindeksiksi): $X(t)$, $X(t;\omega)$

Jakauma

- Stokastisen prosessin **jakauman** (distribution) määräävät sen **äärellisulotteiset jakaumat** (finite-dimensional distributions)

$$P\{X_{t_1} \le x_1, \ldots, X_{t_n} \le x_n\}$$

missä $t_1, \ldots, t_n \in I$, $x_1, \ldots, x_n \in S$ ja $n = 1,2,\ldots$

- Yleensä näiden äärellisulotteistenkaan jakaumien määrääminen ei ole helppoa satunnaismuuttujien X_t välisten **riippuvuuksien** vuoksi
- Diskreettitilaiselle prosessille riittää tarkastella tyyppiä

$$P\{X_{t_1} = x_1, \ldots, X_{t_n} = x_n\}$$

olevia todennäköisyyksiä (vrt. diskreetin sm:n ptnf vs. kf)

Riippuvuus

- Kaikkein yksinkertaisin (mutta ei kovinkaan kiinnostava) esimerkki stokastisesta prosessista saadaan ottamalla joukko **täydellisesti riippumattomia** satunnaismuuttujia X_t. Tällöin

$$P\{X_{t_1} \le x_1, \ldots, X_{t_n} \le x_n\} = P\{X_{t_1} \le x_1\} \cdots P\{X_{t_n} \le x_n\}$$

- Yksinkertaisin ei-triviaali esimerkki on **Markov-prosessi**. Diskreettitilaiselle Markov-prosessille pätee

$$P\{X_{t_1} = x_1, \ldots, X_{t_n} = x_n\} =$$
$$P\{X_{t_1} = x_1\} \cdot P\{X_{t_2} = x_2 \mid X_{t_1} = x_1\} \cdots P\{X_{t_n} = x_n \mid X_{t_{n-1}} = x_{n-1}\}$$

- Tämä liittyy ns. **Markov-ominaisuuteen**:
  - Jos Markov-prosessin nykytila tunnetaan, prosessin tulevaisuus ei mitenkään riipu prosessin aiemmasta menneisyydestä (eli siitä, *miten* nykytilaan on tultu).

Stationaarisuus

- **Määr**. Stokastinen prosessi X on **stationaarinen** (stationary), jos kaikki äärellisulotteiset jakaumat ovat ajan siirron suhteen invariantteja, ts.

$$P\{X_{t_1+\Delta} \le x_1, \ldots, X_{t_n+\Delta} \le x_n\} = P\{X_{t_1} \le x_1, \ldots, X_{t_n} \le x_n\}$$

kaikilla Δ, n, $t_1, \ldots, t_n$ ja $x_1, \ldots, x_n$

- **Seuraus**: Valinnalla $n = 1$ nähdään, että stationaarisen prosessin kaikki yksittäiset satunnaismuuttujat X_t ovat samoin jakautuneita, ts.

$$P\{X_t \le x\} = F(x)$$

kaikilla $t \in I$. Ko. jakaumaa sanotaan prosessin **stationaariseksi jakaumaksi** (stationary distribution).

Stokastiset prosessit liikenneteoriassa

- Tällä kurssilla (ja liikenneteoriassa yleisemminkin) stokastisilla prosessilla kuvataan
  - **saapumisprosessia** (arrival process), so. asiakkaiden saapumista johonkin järjestelmään
  - **tilaprosessia** (state process), so. ko. järjestelmän tilaa
- **Huom**. Jälkimmäisestä käytetään myös nimitystä **liikenneprosessi** (traffic process)

Saapumisprosessi

- Saapumisprosessi voidaan kuvata
  - joko **pisteprosessina** $(\tau_n \mid n = 1,2,...)$, missä τ_n kertoo n:nnen asiakkaan saapumishetken (diskreettiaikainen, jatkuvatilainen)
    - kasvava: $\tau_{n+1} \geq \tau_n$ kaikilla n
      - näin ollen epästationaarinen!
    - yleensä oletetaan, että saapumisten väliset väliajat $\tau_n - \tau_{n\text{-}1}$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita (IID) $\Rightarrow$ uusiutumisprosessi
    - tällöin riittää määritellä väliaikojen jakauma
    - eksponentiaalisesti jakautuneet väliajat $\Rightarrow$ Poisson-prosessi
  - tai **laskuriprosessina** $(A(t) \mid t \geq 0)$, missä $A(t)$ kertoo hetkeen t mennessä saapuneiden asiakkaiden lkm:n (jatkuva-aikainen, diskreettitilainen)
    - kasvava: $A(t+\Delta) \geq A(t)$ kaikilla $t,\Delta \geq 0$
      - näin ollen epästationaarinen!
    - riippumattomat lisäykset, missä $A(t+\Delta) - A(t)$ noudattaa $\mathrm{Poisson}(\lambda\Delta)$-jakaumaa $\Rightarrow$ Poisson-prosessi

Tilaprosessi

- Yksinkertaisessa tapauksessa
  - systeemin tilaa kuvaa pelkkä kokonaisluku
    - esim. asiakkaiden lkm $X(t)$ hetkellä t
- Monimutkaisemmassa tapauksessa
  - systeemin tilana on kokonaislukuarvoinen vektori
    - esim. esto- ja jonoverkkomallit
- Tyypillisesti ollaan kiinnostuneita,
  - onko tilaprosessilla stationaarista jakaumaa
  - ja jos on, mikä se on
- **Huom**. Vaikka systeemin tila ei noudattaisikaan alkuhetkellä 0 stationaarista jakaumaa, monessa tapauksessa tilajakauma lähestyy sitä, kun $t \to \infty$

Sisältö

- Peruskäsitteitä
- Poisson-prosessi
- Markov-prosessit
- Syntymä-kuolema-prosessit

Bernoulli-prosessi

- **Määr**. **Bernoulli-prosessi** $(X_n \mid n = 1,2,...)$ onnistumistodennäköisyytenään p on sarja riippumattomia Bernoulli-toistokokeita (joissa kaikissa onnistumistodennäköisyys on vakio p)
- Kyseessä on selvästikin diskreettiaikainen ja diskreettitilainen prosessi
  - Parametriavaruus: $I = \{1,2,\ldots\}$
  - Tila-avaruus: $S = \{0,1\}$
- Äärellisulotteiset jakaumat (huom. X_n:t ovat IID):

$$P\{X_1 = x_1,\ldots,X_n = x_n\} = P\{X_1 = x_1\}\cdots P\{X_n = x_n\}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_i x_i}(1-p)^{n-\sum_i x_i}$$

- Bernoulli-prosessi on stationaarinen (stat. jak.: Bernoulli(p)-jakauma)

Poisson-prosessi (1)

- Bernoulli-prosessin jatkuva-aikainen vastine on Poisson-prosessi
  - kyseessä on pisteprosessi $(\tau_n \mid n = 1,2,...)$, missä τ_n kertoo n:nnen tapahtuman (esim. asiakkaan saapuminen) tapahtumahetken
  - Bernoulli-prosessin ‘epäonnistumista’ vastaa ‘asiakkaan saapuminen’
- **Määr**. **1**. Pisteprosessia $(\tau_n \mid n = 1,2,...)$ sanotaan **Poisson-prosessiksi** intensiteettinään λ, jos lyhyellä aikavälillä $(t, t{+}h]$ saapuu uusi asiakas tn:llä $\lambda h + o(h)$ (muista aikaväleistä riippumatta)
  - $o(h)$ viittaa sellaiseen funktioon, jolle $o(h)/h \to 0$, kun $h \to 0$
  - uusia asiakkaita saapuu vakiointensiteetillä λ: $(\lambda h + o(h))/h \to \lambda$
  - tn, että välille $(t, t{+}h]$ ei satu saapumista on $1 - \lambda h + o(h)$
- Näin määriteltynä Poisson-prosessi on diskreettiaikainen ja jatkuvatilainen
  - parametriavaruus: $I = \{1,2,\ldots\}$
  - tila-avaruus: $S = (0, \infty)$

Poisson-prosessi (2)

- Tarkastellaan kahden saapumisen väliaikaa $\tau_n - \tau_{n\text{-}1}$ (merk. $\tau_0 = 0$)
  - Koska saapumisintensiteetti pysyy vakiona, väliajan päättyminen lyhyellä aikavälillä $(t,\ t+h]$, kun se on jo kestänyt ajan t, ei riipu t:stä (eikä muista aiemmista saapumisista)
  - Näin ollen saapumisten väliajat ovat riippumattomia ja lisäksi niillä on ns. unohtavaisuusominaisuus, mikä ominaisuus jatkuvista jakaumista on vain eksponenttijakaumalla
- **Määr**. **2**. Pisteprosessia $(\tau_n \mid n = 1,2,\ldots)$ sanotaan **Poisson-prosessiksi** intensiteettinään λ, jos saapumisten väliajat $\tau_n - \tau_{n-1}$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita (IID) yhteisenä jakaumanaan $\mathrm{Exp}(\lambda)$

Poisson-prosessi (3)

- Tarkastellaan lopuksi välillä $[0,t]$ saapuneiden asiakkaiden lkm:ää $A(t)$
  - Bernoulli-prosessissa kiinteällä aikavälillä sattuneiden epäonnistumisten lkm noudattaa binomijakaumaa. Kun aikaväliä lyhennetään, saadaan sopivasti skaalaamalla rajatapauksena Poisson-jakauma.
  - Huom. $A(0)=0$
- **Määr. 3**. Laskuriprosessia $(A(t) \mid t \geq 0)$ sanotaan **Poisson-prosessiksi** intensiteettinään λ, jos ko. prosessin lisäykset yhteispisteettömillä väleillä ovat riippumattomia ja noudattavat Poisson-jakaumaa seuraavasti:

$$A(t+\Delta) - A(t) \sim \mathrm{Poisson}(\lambda\Delta)$$

- Näin määriteltynä Poisson-prosessi on jatkuva-aikainen ja diskreettitilainen
  - parametriavaruus: $I = [0, \infty)$
  - tila-avaruus: $S = \{0,1,2,\ldots\}$

Poisson-prosessi (4)

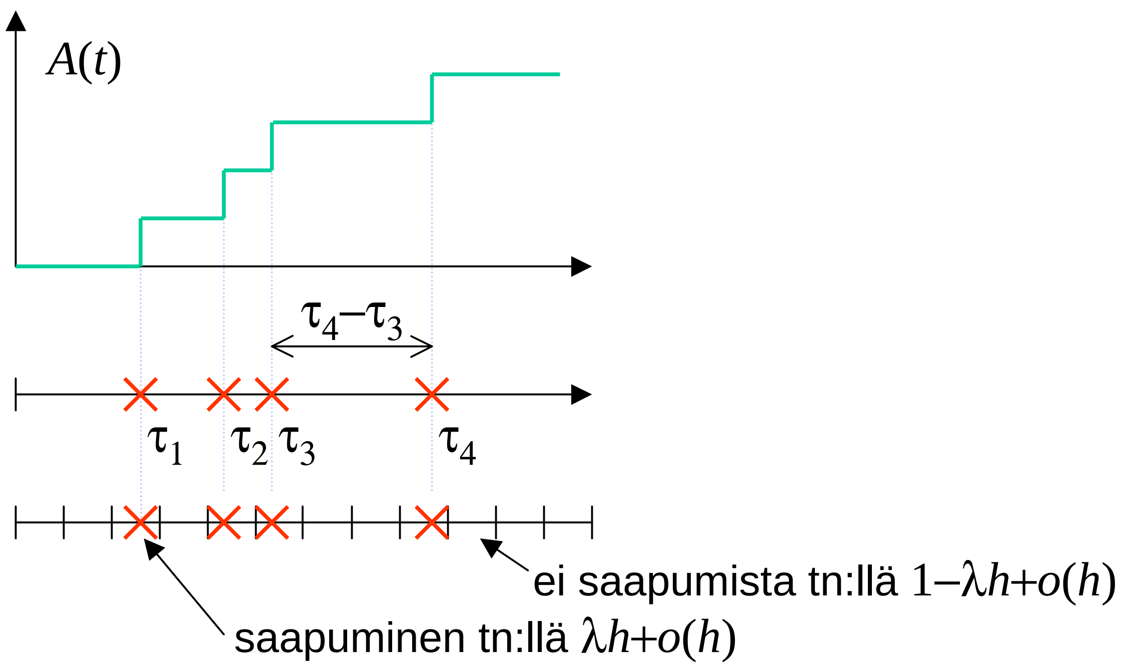
- Yksiulotteinen jakauma: $A(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$
  - $E[A(t)] = \lambda t,\ D^2[A(t)] = \lambda t$
- Äärellisulotteiset jakaumat (eri välien riippumattomuuden nojalla):

$$
\begin{aligned}
&P\{A(t_1) = x_1, \ldots, A(t_n) = x_n\} = \\
&\quad P\{A(t_1) = x_1\} P\{A(t_2) - A(t_1) = x_2 - x_1\} \cdots \\
&\quad P\{A(t_{n-1}) - A(t_n) = x_n - x_{n-1}\}
\end{aligned}
$$

- **Huom**. Laskuriprosessina määritelty Poisson-prosessi ei ole stationaarinen, mutta sillä on stationaariset lisäykset
  - ei siis stationaarista jakaumaakaan mutta riippumattomat ja samoin jakautuneet lisäykset

Kolme eri tapaa luonnehtia Poisson-prosessia

- Voidaan osoittaa, että kaikki kolme Poisson-prosessin määritelmää ovat yhtäpitäviä



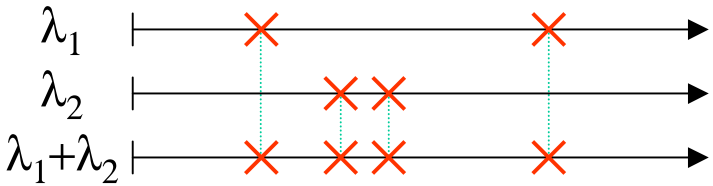
Poisson-prosessin ominaisuuksia (1)

- **Ominaisuus 1** (**Summa**): Olkoot $A_1(t)$ ja $A_2(t)$ riippumattomia Poisson-prosesseja intensiteetein λ_1 ja λ_2. Tällöin niiden summaprosessi (eli ns. superpositio) $A_1(t) + A_2(t)$ on Poisson-prosessi intensiteetillä $\lambda_1 + \lambda_2$.
- **Tod**. Tarkastellaan lyhyttä aikaväliä $(t, t+h]$:
  - tn, ettei ko. välille satu saapumisia kummassakaan prosessissa, on

$$(1-\lambda_1 h+o(h))(1-\lambda_2 h+o(h)) = 1-(\lambda_1+\lambda_2)h+o(h)$$

  - toisaalta, täsmälleen yhden saapumisen tn on

$$(\lambda_1 h+o(h))(1-\lambda_2 h+o(h))+(1-\lambda_1 h+o(h))(\lambda_2 h+o(h))$$
$$=(\lambda_1+\lambda_2)h+o(h)$$



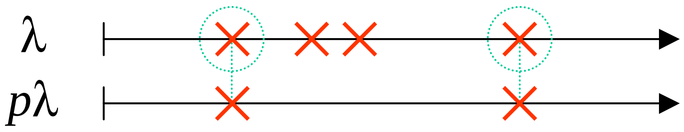
Poisson-prosessin ominaisuuksia (2)

- **Ominaisuus 2** (**Satunnaispoiminta**): Olkoon τ_n Poisson-prosessi intensiteettinään λ. Merk. σ_n:llä osaprosessia, johon on valittu pisteet alkuperäisestä prosessista τ_n satunnaisesti ja riippumattomasti poimimalla (tn:llä p). Tällöin σ_n on Poisson-prosessi intensiteetillä $p\lambda$.
- **Tod**. Tarkastellaan lyhyttä aikaväliä $(t, t+h]$:
  - tn, ettei ko. välillä ole saapumisia satunnaispoiminnan jälkeen, on

$$(1-\lambda h+o(h))+(1-p)(\lambda h+o(h))=1-p\lambda h+o(h)$$

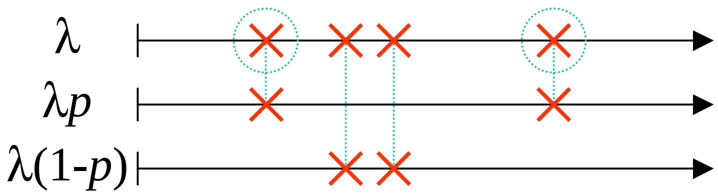
  - toisaalta, täsmälleen yhden saapumisen tn on

$$p(\lambda h+o(h))=p\lambda h+o(h)$$



Poisson-prosessin ominaisuuksia (3)

- **Ominaisuus 3** (**Satunnaislajittelu**): Olkoon τ_n Poisson-prosessi intensiteettinään λ. Merk. $\sigma_n^{(1)}$:llä osaprosessia, johon on valittu pisteet alkuperäisestä prosessista τ_n satunnaisesti ja riippumattomasti poimimalla (tn:llä p), ja $\sigma_n^{(2)}$:llä jäljelle jäävistä pisteistä muodostettua osaprosessia. Tällöin $\sigma_n^{(1)}$ ja $\sigma_n^{(2)}$ ovat riippumattomia Poisson-prosesseja intensiteeteillä $p\lambda$ ja $(1-p)\lambda$.
- **Tod**. Ominaisuuden 2 nojalla riittäisi osoittaa, että prosessit ovat riippumattomia. Todistus kuitenkin sivuutetaan tällä kurssilla.



Poisson-prosessin ominaisuuksia (4)

- **Ominaisuus 4** (**PASTA**): Tarkastellaan (stabiilia) järjestelmää, johon saapuu uusia asiakkaita Poisson-prosessin mukaisesti. Merkitään $X(t)$:llä systeemin tilaa hetkellä t (jatkuva-aikainen prosessi) ja Y_n:llä systeemin tilaa n:nnen asiakkaan saapumishetkellä (diskreettiaikainen prosessi). Näillä kahdella prosessilla on täsmälleen sama stationaarinen jakauma.
- Voidaan siis sanoa, että
  - "saapuva asiakas näkee systeemin tasapainotilassa"
  - PASTA = "Poisson Arrivals See Time Average"
- Huom. PASTA-ominaisuus on Poisson-prosessin erityisominaisuus
  - eikä se siis ole voimassa muille saapumisprosesseille
  - Tarkastellaan esim. systeemiä, jossa on vain yksi on-off-tyyppinen asiakas ("oma PC"). Poistuttuaan systeemistä, sama asiakas palaa sinne satunnaisen ajan kuluttua. Tällainen asiakas näkee systeemin aina tyhjänä sinne saapuessaan. Sen sijaan jatkuvassa ajassa tarkasteltuna ko. systeemi on vain ajoittain tyhjänä.

Sisältö

- Peruskäsitteitä
- Poisson-prosessi
- Markov-prosessit
- Syntymä-kuolema-prosessit

Markov-prosessi

- Tark. jatkuva-aikaista ja diskreettitilaista stokastista prosessia $X(t)$
  - joko tila-avaruudella $S = \{0,1,\ldots,N\}$ tai $S = \{0,1,...\}$
- **Määr**. Prosessi $X(t)$ on **Markov-prosessi**, jos

$$P\{X(t_{n+1}) = x_{n+1} \mid X(t_1) = x_1, \ldots, X(t_n) = x_n\} = P\{X(t_{n+1}) = x_{n+1} \mid X(t_n) = x_n\}$$

kaikilla n, $t_1 < \ldots < t_{n+1}$ ja $x_1, \ldots, x_{n+1}$

- Tätä ehtoa sanotaan **Markov-ominaisuudeksi**
  - Jos Markov-prosessin nykytila tunnetaan, prosessin tulevaisuus ei mitenkään riipu prosessin aiemmasta menneisyydestä (eli siitä, *miten* nykytilaan on tultu)
  - Nykytila siis sisältää kaiken jatkon kannalta tarpeellisen informaation

Esimerkki

- Riippumattomien lisäysten prosessi $X(t)$ on aina Markov-prosessi:

$$X(t_n) = X(t_{n-1}) + (X(t_n) - X(t_{n-1}))$$

- **Seuraus**: Poisson-prosessi $A(t)$ on Markov-prosessi
  - Määritelmän 3 mukaan Poisson-prosessin lisäykset ovat riippumattomia

Aikahomogeenisuus

- **Määr**. Markov-prosessi $X(t)$ on **aikahomogeeninen**, jos

$$P\{X(t+\Delta)=y \mid X(t)=x\} = P\{X(\Delta)=y \mid X(0)=x\}$$

kaikilla $t, \Delta \geq 0$ ja $x, y \in S$

  – Tn:t $P\{X(t+\Delta)=y \mid X(t)=x\}$ eivät siis riipu t:stä

Tilasiirtymäintensiteetit

- Tarkastellaan aikahomogeenista Markov-prosessia $X(t)$
- **Tilasiirtymäintensiteetit** q_{ij} (state transition rate), missä $i, j \in S$, määritellään seuraavasti:

$$q_{ij} := \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} P\{X(h) = j \mid X(0) = i\}$$

- Tilatn:t $P\{X(t) = i\}$, $i \in S$, määräytyvät yksikäsitteisesti siirtymäintensiteeteistä q_{ij}, kunhan ns. **alkujakauma** (initial distribution) eli tn:t $P\{X(0) = i\}$, $i \in S$, on annettu

- **Huom**. Jatkossa rajoitamme tarkastelumme pelkästään aikahomogeenisiin Markov-prosesseihin

Eksponentiaalisesti jakautuneet tilassaoloajat

- Oletetaan, että Markov-prosessi on tilassa i hetkellä t.
- Lyhyellä aikavälillä $(t, t+h]$ prosessi siirtyy uuteen tilaan j tn:llä $q_{ij}h + o(h)$ (riippumatta siitä, mitä tapahtui ennen hetkeä t)
- Merkitään q_i:llä kokonaisintensiteettiä siirtyä pois tilasta i, ts.

$$q_i := \sum_{j \neq i} q_{ij}$$

- Lyhyellä aikavälillä $(t, t+h]$ prosessi siirtyy pois tilasta i tn:llä $q_i h + o(h)$ (riippumatta siitä, mitä tapahtui ennen hetkeä t)
- Kyseessä on selvästikin ns. unohtavaisuusominaisuus
- Tilassa i vietetty aika noudattaa siis eksponenttijakaumaa intensiteettinään q_i

Tilasiirtymätodennäköisyydet

- Merkitään T_i:llä oloaikaa tilassa i ja T_{ij}:llä sellaista (potentiaalista) oloaikaa tilassa i, joka päättyy siirtymään tilaan j:

$$T_i \sim \mathrm{Exp}(q_i), \quad T_{ij} \sim \mathrm{Exp}(q_{ij})$$

- Sm T_i voidaan ajatella riippumattomien ja eksponentiaalisesti jakautuneiden sm:ien T_{ij} minimiksi (ks. luennon 5 kalvo 44):

$$T_i = \min_{j \neq i} T_{ij}$$

- Merk. p_{ij}:llä tn:ttä, että toteutunut siirtymä on tilasta i tilaan j. Ko. **tilasiirtymätodennäköisyydet** (state transition probabilities) saadaan kaavalla

$$p_{ij} = P\{T_i = T_{ij}\} = \frac{q_{ij}}{q_i}$$

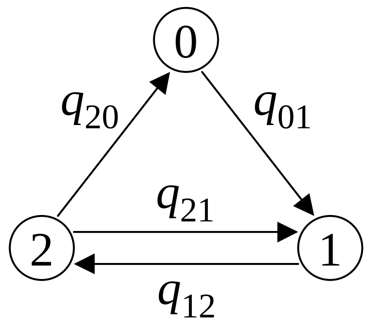
Tilasiirtymäkaavio

- Aikahomogeeninen Markov-prosessi esitetään usein ns. **tilasiirtymä-kaavion** (state transition diagram) avulla. Kyseessä on suunnattu verkko, jonka
  - solmut vastaavat prosessin tiloja ja
  - yksisuuntaiset linkit vastaavat mahdollisia tilasiirtymiä

$$\text{linkki tilasta } i \text{ tilaan } j \quad \Leftrightarrow \quad q_{ij} > 0$$

- **Esim**. Kolmitilainen Markov-prosessi ($S = \{0,1,2\}$):

$$Q = \begin{pmatrix} - & + & 0 \\ 0 & - & + \\ + & + & - \end{pmatrix}$$



Pelkistymättömyys

- **Määr**. Tilasta i **pääsee** tilaan j ($i \to j$), jos tilasiirtymäkaaviosta löytyy suunnattu polku i:stä j:hin
  - Jos näin on, niin lähdettäessä tilasta i tilassa j käydään (joskus tulevaisuudessa) positiivisella tn:llä
- **Määr**. Tilat i ja j **kommunikoivat** ($i \leftrightarrow j$), jos $i \to j$ ja $j \to i$
- **Määr**. Markov-prosessi on **pelkistymätön** (irreducible), jos kaikki tilat kommunikoivat keskenään
  - Esimerkiksi edellisellä kalvolla esitetty Markov-prosessi on pelkistymätön

Tasapainojakauma ja globaalit tasapainoyhtälöt

- Tark. pelkistymätöntä Markov-prosessia $X(t)$ siirtymäintensiteetein q_{ij}
- **Määr**. Olkoon $\pi = (\pi_i \mid \pi_i \geq 0,\ i \in S)$ tila-avaruudessa S määritelty jakauma, ts. se toteuttaa ns. **normeerausehdon**

$$\sum_{i \in S} \pi_i = 1 \qquad \text{(N)}$$

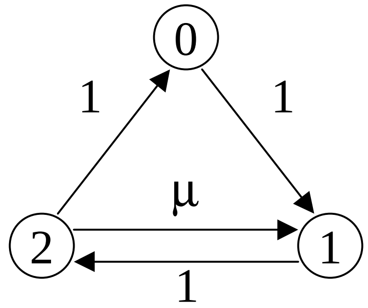
Jakauma π on prosessin $X(t)$ **tasapainojakauma** (equilibrium distribution), jos seuraavat **globaalit tasapainoehdot** (global balance equations) ovat voimassa kaikilla $i \in S$:

$$\sum_{j \neq i} \pi_i q_{ij} = \sum_{j \neq i} \pi_j q_{ji} \qquad \text{(GBE)}$$

  - On mahdollista, ettei prosessilla ole tasapainojakaumaa. Kuitenkin, jos esim. tila-avaruus on äärellinen, tasapainojakauma on aina olemassa.
  - Valitsemalla tasapainojakauma alkujakaumaksi (ts. $P\{X(0) = i\} = \pi_i$), ko. Markov-prosessista tulee stationaarinen (stationaarisena jakaumanaan π)

Esimerkki

$$Q = \begin{pmatrix} - & 1 & 0 \\ 0 & - & 1 \\ 1 & \mu & - \end{pmatrix}$$



$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \qquad \text{(N)}$$

$$\begin{aligned} \pi_0 \cdot 1 &= \pi_2 \cdot 1 \\ \pi_1 \cdot 1 &= \pi_0 \cdot 1 + \pi_2 \cdot \mu \\ \pi_2 \cdot (1+\mu) &= \pi_1 \cdot 1 \end{aligned} \qquad \text{(GBE)}$$

$$\Rightarrow \quad \pi_0 = \frac{1}{3+\mu}, \quad \pi_1 = \frac{1+\mu}{3+\mu}, \quad \pi_2 = \frac{1}{3+\mu}$$

Lokaalit tasapainoyhtälöt ja kääntyvyys

- Tarkastellaan edelleen pelkistymätöntä Markov-prosessia $X(t)$ siirtymä-intensiteetein q_{ij}
- **Väite**. Olkoon $\pi = (\pi_i \mid \pi_i \geq 0,\ i \in S)$ tila-avaruudessa S määritelty jakauma, ts.

$$\sum_{i\in S} \pi_i = 1 \qquad \text{(N)}$$

Jos seuraavat **lokaalit tasapainoehdot** (local balance equations) ovat voimassa kaikilla $i,j \in S$:

$$\pi_i q_{ij} = \pi_j q_{ji} \qquad \text{(LBE)}$$

niin π on prosessin tasapainojakauma.

- **Tod**. (GBE):t seuravat (LBE):istä summaamalla $j \neq i$
- Tässä tapauksessa ko. Markov-prosessia sanotaan **kääntyväksi** (reversible)

Sisältö

- Peruskäsitteitä
- Poisson-prosessi
- Markov-prosessit
- Syntymä-kuolema-prosessit

Syntymä-kuolema-prosessi

- Tark. jatkuva-aikaista ja diskreettitilaista Markov-prosessia $X(t)$
  - joko tila-avaruudella $S = \{0,1,\ldots,N\}$ tai $S = \{0,1,...\}$
- **Määr**. Markov-prosessi $X(t)$ on **syntymä-kuolema-prosessi** (birth-death process), jos tilasiirtymät ovat mahdollisia vain vierekkäisten tilojen välillä, ts.

$$|i - j| > 1 \quad \Rightarrow \quad q_{ij} = 0$$

- Tässä tapauksessa merkitään

$$\mu_i := q_{i,i-1} \geq 0$$

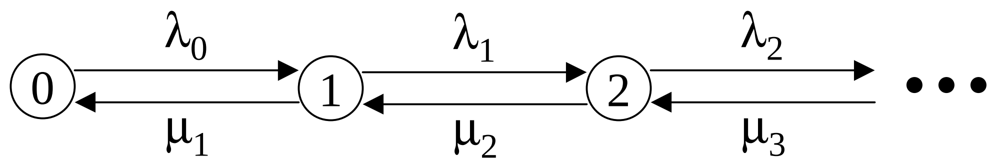
$$\lambda_i := q_{i,i+1} \geq 0$$

  - Huom. $\mu_0 = 0$ ja $\lambda_N = 0$ (kun $N < \infty$)

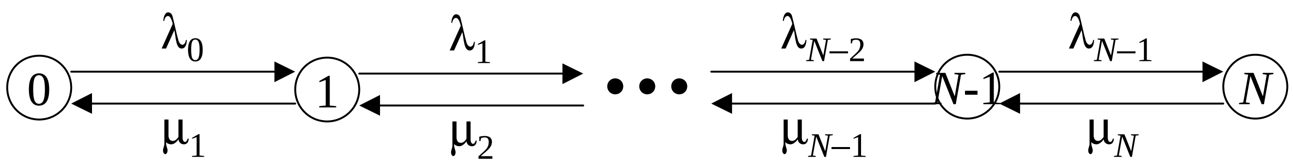
Pelkistymättömyys

- **Väite**: Syntymä-kuolema-prosessi on pelkistymätön, jos ja vain jos $\lambda_i > 0$ kaikilla $i \in S \backslash \{N\}$ ja $\mu_i > 0$ kaikilla $i \in S \backslash \{0\}$

- Ääretöntilaisen pelkistymättömän sk-prosessin tilasiirtymäkaavio:



- Äärellistilaisen pelkistymättömän sk-prosessin tilasiirtymäkaavio:



Tasapainojakauma (1)

- Tarkastellaan pelkistymätöntä syntymä-kuolema-prosessia $X(t)$
- Tarkoitus on johtaa tasapainojakauma $\pi = (\pi_i \mid i \in S)$, mikäli sellainen on olemassa
- Lokaalit tasapainoyhtälöt:

$$\pi_i \lambda_i = \pi_{i+1} \mu_{i+1} \qquad \text{(LBE)}$$

- Näin ollen

$$\pi_{i+1} = \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \pi_i \quad \Rightarrow \quad \pi_i = \pi_0 \prod_{j=1}^{i} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}$$

- Jakaumaehto eli normeerausehto:

$$\sum_{i \in S} \pi_i = \pi_0 \sum_{i \in S} \prod_{j=1}^{i} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} = 1 \qquad \text{(N)}$$

Tasapainojakauma (2)

- Tasapainojakauma on siis olemassa täsmälleen silloin, kun

$$\sum_{i\in S}\prod_{j=1}^{i}\frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}<\infty$$

- **Äärellinen tila-avaruus**:
  Ko. summa on aina äärellinen. Tasapainojakaumaksi tulee

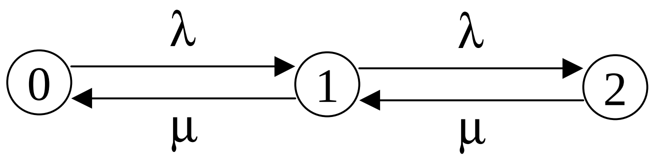
$$\pi_i=\pi_0\prod_{j=1}^{i}\frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j},\qquad \pi_0=\left(1+\sum_{i=1}^{N}\prod_{j=1}^{i}\frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}\right)^{-1}$$

- **Ääretön tila-avaruus**:
  Jos ko. summa on äärellinen, niin tasapainojakaumaksi tulee

$$\pi_i=\pi_0\prod_{j=1}^{i}\frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j},\qquad \pi_0=\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{i}\frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}\right)^{-1}$$

Esimerkki

$$Q = \begin{pmatrix} - & \lambda & 0 \\ \mu & - & \lambda \\ 0 & \mu & - \end{pmatrix}$$



$$\pi_i \lambda = \pi_{i+1} \mu$$

$$\Rightarrow \quad \pi_{i+1} = \rho \pi_i \quad (\rho := \lambda / \mu) \qquad \text{(LBE)}$$

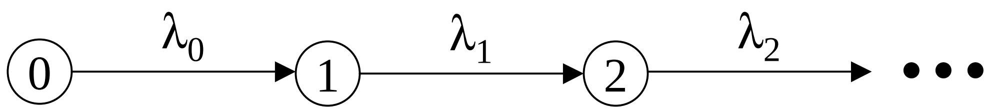
$$\Rightarrow \quad \pi_i = \pi_0 \rho^i$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = \pi_0 (1 + \rho + \rho^2) = 1 \qquad \text{(N)}$$

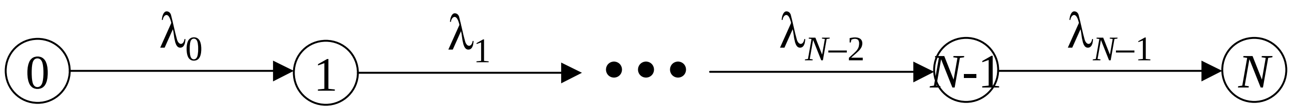
$$\Rightarrow \quad \pi_i = \frac{\rho^i}{1 + \rho + \rho^2}$$

Puhdas syntymäprosessi

- **Määr**. Syntymä-kuolema-prosessi on **puhdas syntymäprosessi**, jos $\mu_i = 0$ kaikilla $i \in S$
- Ääretöntilaisen syntymäprosessin tilasiirtymäkaavio:



- Äärellistilaisen syntymäprosessin tilasiirtymäkaavio:



- Esimerkiksi Poisson-prosessi on ääretöntilainen puhdas syntymä-prosessi (intensiteetein $\lambda_i = \lambda$ kaikilla $i \in S = \{0,1,\ldots\}$)
- **Huom**. Puhdas syntymäprosessi ei ole koskaan pelkistymätön (saati sitten stationaarinen).

THE END