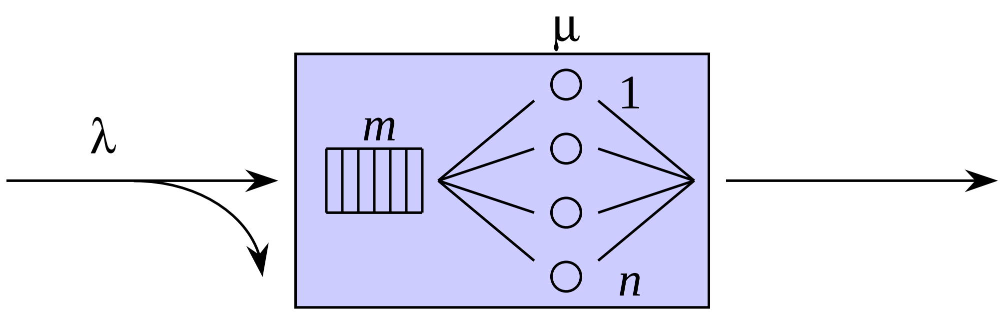
7. Menetysjärjestelmät

Sisältö

- Kertausta: yksinkertainen liikenneteoreettinen malli
- Poisson-malli (asiakkaita ∞, palvelijoita ∞)
- Erlang-malli (asiakkaita ∞, palvelijoita $n < \infty$)
- Binomimalli (asiakkaita $k < \infty$, palvelijoita $n = k$)
- Engset-malli (asiakkaita $k < \infty$, palvelijoita $n < k$)

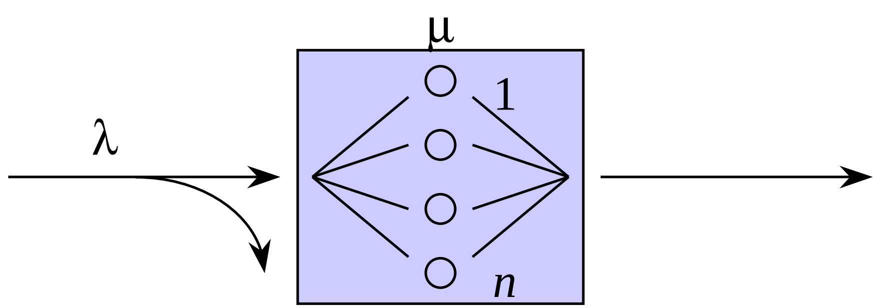
Yksinkertainen liikenneteoreettinen malli

- **Asiakkaita saapuu** keskimäärin nopeudella λ (asiakasta per aikayks.)
  - $1/\lambda$ = keskimääräinen asiakkaiden väliaika
- Asiakkaita **palvellaan** n:llä rinnakkaisella **palvelijalla**
- Palvelija palvelee keskimäärin nopeudella μ (asiakasta per aikayks.)
  - $1/\mu$ = keskimääräinen asiakkaan palveluaika
- Lisäksi järjestelmässä on m **odotuspaikkaa**
- Estyvät asiakkaat (joiden saapuessa järjestelmä on **täysi**) menetetään



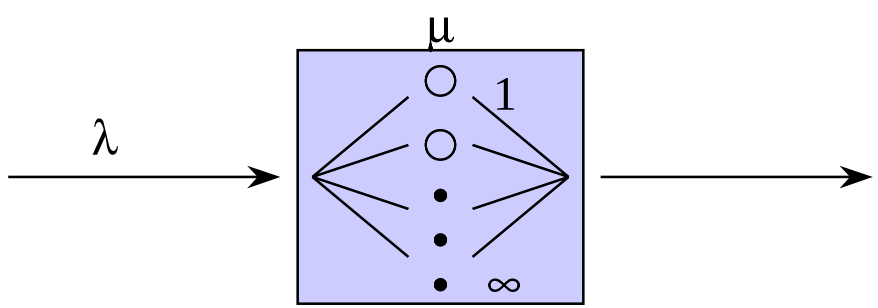
Puhdas menetysjärjestelmä

- Ei yhtään odotuspaikkaa ($m = 0$)
  - Jos asiakkaan saapuessa kaikki palvelijat ovat käytössä eli järjestelmä on ns. **estotilassa** (usein puhutaan myös **täydestä** järjestelmästä), kyseinen asiakas poistuu koko järjestelmästä pääsemättä palveluun ollenkaan. Järjestelmä on siis **estollinen**.
- Käyttäjän kokeman palvelun laadun kannalta kiinnostava suure on esim
  - todennäköisyys, että järjestelmä on täysi asiakkaan saapuessa
- **Huom**. Saapumisintensiteetin λ vakioarvon lisäksi tulemme tarkastelemaan tilannetta, missä intensiteetti $\lambda(x)$ riippuu systeemin tilasta x



Ääretön järjestelmä

- Ääretön määrä palvelijoita ($n = \infty$)
  - estoton ja viiveetön: yhtäkään asiakasta ei menetetä, eikä kenenkään tarvitse edes odottaa palveluun pääsyä
- **Huom**. Saapumisintensiteetin λ vakioarvon lisäksi tulemme tarkastelemaan tilannetta, missä intensiteetti $\lambda(x)$ riippuu systeemin tilasta x



Esto

- Menetysjärjestelmässä osa kutsuista menetetään:
  - saapuva kutsu menetetään, jos kaikki kanavat on varattu (so. systeemi on täysi) ko. kutsun saapuessa
  - termi **esto** viittaa tähän tapahtumaan
- Menetysjärjestelmissä voidaan määritellä useita eri estosuureita:
  - **Kutsuesto** B_c = tn, että saapuva kutsu menetetään = niiden saapuvien kutsujen osuus, jotka menetetään
  - **Aikaesto** B_t = tn, että systeemi on täysi (mielivaltaisena ajanhetkenä) = se osuus ajasta, jolloin systeemi on täysi
- Nämä suureet eivät välttämättä ole samoja; tosin
  - jos uudet kutsut saapuvat ns. Poisson-prosessin mukaisesti, niin $B_c = B_t$
- Sovellutusten kannalta ollaan yleensä kiinnostuneita kutsuestosta, joka kuvaa käyttäjien kokemaa palvelun laatua
- Aikaesto taas on usein helpommin laskettavissa oleva suure

Sisältö

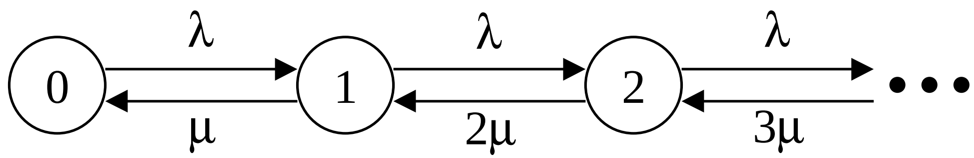
- Kertausta: yksinkertainen liikenneteoreettinen malli
- Poisson-malli (asiakkaita ∞, palvelijoita ∞)
- Erlang-malli (asiakkaita ∞, palvelijoita $n < \infty$)
- Binomimalli (asiakkaita $k < \infty$, palvelijoita $n = k$)
- Engset-malli (asiakkaita $k < \infty$, palvelijoita $n < k$)

Poisson-malli (M/M/∞)

- **Määr**. **Poisson-malli** on seuraavanlainen yksinkert. liikenneteor. malli:
  - ääretön määrä riippumattomia käyttäjiä ($k = \infty$)
  - saapumisten väliajat IID noudattaen $\mathrm{Exp}(\lambda)$-jakaumaa odotusarvonaan $1/\lambda$
    - saapumisprosessi on siis Poisson-prosessi intensiteettinään λ
  - **ääretön** määrä palvelijoita ($n = \infty$)
  - palveluajat IID noudattaen $\mathrm{Exp}(\mu)$-jakaumaa odotusarvonaan $1/\mu$
  - ei odotuspaikkoja ($m = 0$)
- **Huom**.
  - Kendallin merkinnöillä kyseessä on M/M/∞ -jonomalli
  - ääretön järjestelmä, siis **estoton**
- Merkintä:
  - $a = \lambda/\mu$ = liikenneintensiteetti

Tilasiirtymäkaavio

- Tark. järjestelmässä olevien asiakkaiden lkm:ää $X(t)$ ajan t funktiona
  - Oletetaan, että $X(t) = i$ jollakin hetkellä t
  - Lyhyellä aikavälillä $(t, t{+}h]$ voi tapahtua seuraavaa:
    - tn:llä $\lambda h + o(h)$ systeemiin saapuu uusi asiakas (aiheuttaen tilasiirtymän $i \rightarrow i+1$)
    - jos $i > 0$, niin tn:llä $i\mu h + o(h)$ jonkun systeemissä olevan asiakkaan palvelu päättyy (aiheuttaen tilasiirtymän $i \rightarrow i-1$)
- Prosessi $X(t)$ on selvästikin Markov-prosessi tilasiirtymäkaavionaan



- **Huom**. Prosessi $X(t)$ on pelkistymätön sk-prosessi äärettömällä tila-avaruudella $S = \{0,1,2,...\}$

Tasapainojakauma (1)

- Lähdetään liikkeelle lokaaleista tasapainoyhtälöistä:

$$\pi_i \lambda = \pi_{i+1}(i+1)\mu \qquad \text{(LBE)}$$

$$\Rightarrow \quad \pi_{i+1} = \frac{\lambda}{(i+1)\mu}\pi_i = \frac{a}{i+1}\pi_i$$

$$\Rightarrow \quad \pi_i = \frac{a^i}{i!}\pi_0, \quad i = 0,1,2,\ldots$$

- Sovelletaan sitten jakaumaehtoa:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i = \pi_0 \sum_{i=0}^{\infty}\frac{a^i}{i!} = 1 \qquad \text{(N)}$$

$$\Rightarrow \quad \pi_0 = \left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{a^i}{i!}\right)^{-1} = \left(e^a\right)^{-1} = e^{-a}$$

Tasapainojakauma (2)

- Tasapainotilanteessa systeemissä olevien asiakkaiden lkm X noudattaa siis **Poisson-jakaumaa**:

$$X \sim \text{Poisson}(a)$$

$$P\{X = i\} = \pi_i = \frac{a^i}{i!} e^{-a}, \quad i = 0,1,2,\ldots$$

$$E[X] = a, \quad D^2[X] = a$$

- **Huom**. (insensitiivisyys palveluajan jakauman suhteen)
  - Itse asiassa tulos pätee yleisemminkin: eksponentiaalisen palveluaika-jakauman sijasta voidaan palveluajalle valita mikä tahansa jakauma, jonka odotusarvo on $1/\mu$ (tätä sanotaan **insensitiivisyydeksi** palveluajan jakauman suhteen)
  - Voimme siis $M/M/\infty$ -mallin sijasta tarkastella yleisempää $M/G/\infty$ -mallia

Sisältö

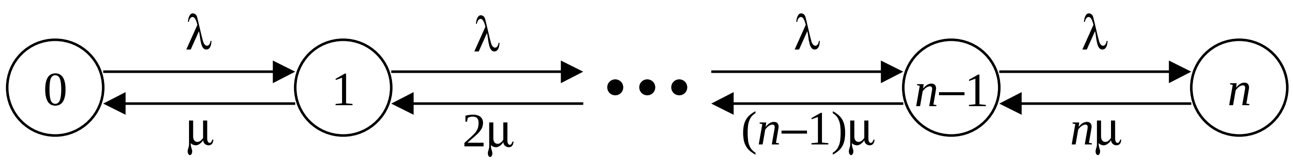
- Kertausta: yksinkertainen liikenneteoreettinen malli
- Poisson-malli (asiakkaita ∞, palvelijoita ∞)
- Erlang-malli (asiakkaita ∞, palvelijoita $n < \infty$)
- Binomimalli (asiakkaita $k < \infty$, palvelijoita $n = k$)
- Engset-malli (asiakkaita $k < \infty$, palvelijoita $n < k$)

Erlang-malli (M/M/n/n)

- **Määr**. **Erlang-malli** on seuraavanlainen yksinkert. liikenneteor. malli:
  - ääretön määrä riippumattomia käyttäjiä ($k = \infty$)
  - saapumisten väliajat IID noudattaen $\mathrm{Exp}(\lambda)$-jakaumaa odotusarvonaan $1/\lambda$
    - saapumisprosessi on siis Poisson-prosessi intensiteettinään λ
  - **äärellinen** määrä palvelijoita ($n < \infty$)
  - palveluajat IID noudattaen $\mathrm{Exp}(\mu)$-jakaumaa odotusarvonaan $1/\mu$
  - ei odotuspaikkoja ($m = 0$)
- **Huom**.
  - Kendallin merkinnöillä kyseessä on M/M/n/n -jonomalli
  - puhdas estojärjestelmä, siis **estollinen**
- Merkintä:
  - $a = \lambda/\mu$ = liikenneintensiteetti

Tilasiirtymäkaavio

- Tark. järjestelmässä olevien asiakkaiden lkm:ää $X(t)$ ajan t funktiona
  - Oletetaan, että $X(t) = i$ jollakin hetkellä t
  - Lyhyellä aikavälillä $(t, t+h]$ voi tapahtua seuraavaa:
    - jos $i < n$, niin tn:llä $\lambda h + o(h)$ systeemiin saapuu uusi asiakas (aiheuttaen tilasiirtymän $i \rightarrow i + 1$)
    - jos $i > 0$, niin tn:llä $i\mu h + o(h)$ jonkun systeemissä olevan asiakkaan palvelu päättyy (aiheuttaen tilasiirtymän $i \rightarrow i - 1$)
- Prosessi $X(t)$ on selvästikin Markov-prosessi tilasiirtymäkaavionaan



- **Huom**. Prosessi $X(t)$ on pelkistymätön sk-prosessi äärellisellä tila-avaruudella $S = \{0,1,2,\ldots,n\}$

Tasapainojakauma (1)

- Lähdetään jälleen liikkeelle lokaaleista tasapainoyhtälöistä:

$$\pi_i \lambda = \pi_{i+1}(i+1)\mu \qquad \text{(LBE)}$$

$$\Rightarrow \quad \pi_{i+1} = \frac{\lambda}{(i+1)\mu}\pi_i = \frac{a}{i+1}\pi_i$$

$$\Rightarrow \quad \pi_i = \frac{a^i}{i!}\pi_0, \quad i = 0,1,\ldots,n$$

- Sovelletaan sitten jakaumaehtoa:

$$\sum_{i=0}^{n} \pi_i = \pi_0 \sum_{i=0}^{n} \frac{a^i}{i!} = 1 \qquad \text{(N)}$$

$$\Rightarrow \quad \pi_0 = \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{a^i}{i!} \right)^{-1}$$

Tasapainojakauma (2)

- Tasapainotilanteessa systeemissä olevien asiakkaiden lkm X noudattaa siis ns. **katkaistua Poisson-jakaumaa**:

$$P\{X = i\} = \pi_i = \frac{\frac{a^i}{i!}}{\sum_{j=0}^{n} \frac{a^j}{j!}}, \quad i = 0,1,\ldots,n$$

- **Huom**. (insensitiivisyys palveluajan jakauman suhteen)
  - Tulos pätee jälleen yleisemminkin: eksponentiaalisen palveluaika-jakauman sijasta voidaan palveluajalle valita mikä tahansa jakauma, jonka odotusarvo on $1/\mu$
  - Voimme siis M/M/n/n -mallin sijasta tarkastella yleisempää M/G/n/n -mallia

Aikaesto

- **Aikaesto** B_t = se osuus ajasta, jolloin systeemi on täysi = tn, että systeemi on mielivaltaisena ajanhetkenä täysi eli tilassa n = π_n:

$$B_t := P\{X = n\} = \pi_n = \frac{\frac{a^n}{n!}}{\sum_{j=0}^{n} \frac{a^j}{j!}}$$

Kutsuesto

- **Kutsuesto** B_c = niiden saapuvien kutsujen osuus, jotka menetetään = tn, että saapuva asiakas menetetään = tn, että asiakkaan saapuessa systeemi on täysi eli tilassa n
- Poisson-prosessin PASTA-ominaisuuden mukaan: saapuva asiakas näkee systeemin tasapainossa. Tästä päättelemme, että kutsuesto on Erlang-mallissa täsmälleen sama kuin aikaestokin:

$$B_\mathrm{c} = B_\mathrm{t} = \frac{\frac{a^n}{n!}}{\sum_{j=0}^{n} \frac{a^j}{j!}}$$

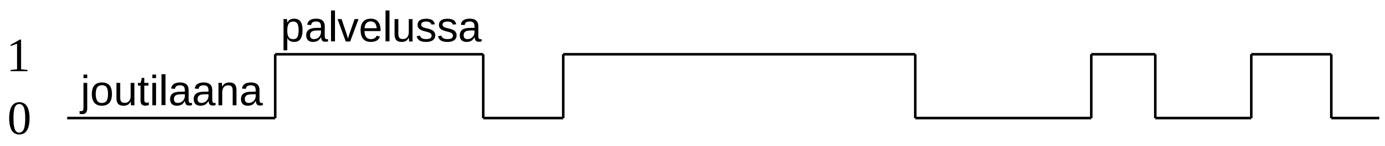
- Kuten aiemmin on jo todettu, tämä on ns. **Erlangin (esto)kaava**

Sisältö

- Kertausta: yksinkertainen liikenneteoreettinen malli
- Poisson-malli (asiakkaita ∞, palvelijoita ∞)
- Erlang-malli (asiakkaita ∞, palvelijoita $n < \infty$)
- Binomimalli (asiakkaita $k < \infty$, palvelijoita $n = k$)
- Engset-malli (asiakkaita $k < \infty$, palvelijoita $n < k$)

Binomimalli (M/M/k/k/k)

- **Määr**. **Binomimalli** on seuraavanlainen yksinkert. liikenneteor. malli:
  - äärellinen määrä riippumattomia asiakkaita ($k < \infty$)
    - asiakkaat **on-off-tyyppisiä** (siis välillä ‘joutilaita’ ja välillä ‘palvelussa’)
  - joutenoloajat IID noudattaen $\mathrm{Exp}(\nu)$-jakaumaa odotusarvonaan $1/\nu$
  - jokaiselle asiakkalle oma palvelija ($n = k$)
  - palveluajat IID noudattaen $\mathrm{Exp}(\mu)$-jakaumaa odotusarvonaan $1/\mu$
  - ei odotuspaikkoja ($m = 0$)
- **Huom**.
  - Kendallin merkinnöillä: M/M/k/k/k -jonomalli
  - ko. systeemi on **estoton** (vaikkakin äärellinen)
- On-off tyyppinen asiakas (vrt. luento 4, kalvo 7):



On-off-tyyppinen asiakas (1)

- Merk. $X_j(t)$:llä asiakkaan j ($j = 1,2,\ldots,k$) tilaa hetkellä t
  - Indeksointi: tila 0 = 'joutilaana', tila 1 = 'palvelussa'
  - Lyhyellä aikavälillä $(t, t{+}h]$ voi tapahtua seuraavaa:
    - jos $X_j(t) = 0$, niin tn:llä $\nu h + o(h)$ asiakas siirtyy palveluun (aiheuttaen tilasiirtymän $0 \to 1$)
    - jos $X_j(t) = 1$, niin tn:llä $\mu h + o(h)$ asiakkaan palvelu päättyy (aiheuttaen tilasiirtymän $1 \to 0$)
- Prosessi $X_j(t)$ on selvästikin Markov-prosessi tilasiirtymäkaavionaan

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, shift left, "\nu"] & 1 \arrow[l, shift left, "\mu"] \end{tikzcd}$$

- **Huom**. Prosessi $X(t)$ on pelkistymätön sk-prosessi äärellisellä tila-avaruudella $S = \{0,1\}$

On-off-tyyppinen asiakas (2)

- Prosessin $X_j(t)$ tasapainojakauman laskemiseksi lähdetään liikkeelle lokaalista tasapainoyhtälöstä:

$$\pi_0^{(j)}\nu = \pi_1^{(j)}\mu \quad \Rightarrow \quad \pi_1^{(j)} = \frac{\nu}{\mu}\pi_0^{(j)}$$

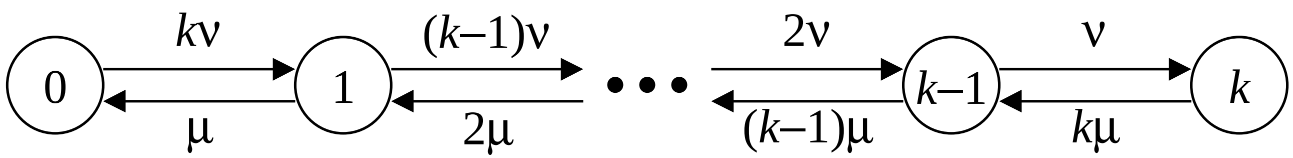
- Jakaumaehdon mukaan:

$$\pi_0^{(j)} + \pi_1^{(j)} = \pi_0^{(j)}(1+\frac{\nu}{\mu}) = 1 \quad \Rightarrow \quad \pi_0^{(j)} = \frac{\mu}{\nu+\mu}, \quad \pi_1^{(j)} = \frac{\nu}{\nu+\mu}$$

- Tasapainotilanteessa yksittäisen asiakkaan tila X_j noudattaa siis **Bernoulli-jakaumaa** onnistumistodennäköisyytenään $\nu/(\nu+\mu)$
- Tästä voitaisiin suoraan päätellä (koska asiakkaat oletettu toisistaan riippumattomiksi), että koko systeemin tilan X (so. systeemissä olevien asiakkaiden lkm:n) tasapainojakauma on $\mathrm{Bin}(k, \nu/(\nu+\mu))$-jakauma

Tilasiirtymäkaavio

- Tark. järjestelmässä olevien asiakkaiden lkm:ää $X(t)$ ajan t funktiona
  - Oletetaan, että $X(t) = i$ jollakin hetkellä t
  - Lyhyellä aikavälillä $(t, t+h]$ voi tapahtua seuraavaa:
    - jos $i < k$, niin tn:llä $(k - i)\nu h + o(h)$ joku joutilaina olevista asiakkaista siirtyy palveluun (aiheuttaen tilasiirtymän $i \to i + 1$)
    - jos $i > 0$, niin tn:llä $i\mu h + o(h)$ jonkun systeemissä olevan asiakkaan palvelu päättyy (aiheuttaen tilasiirtymän $i \to i - 1$)
- Prosessi $X(t)$ on selvästikin Markov-prosessi tilasiirtymäkaavionaan



- **Huom**. Prosessi $X(t)$ on pelkistymätön sk-prosessi äärellisellä tila-avaruudella $S = \{0,1,\ldots,k\}$

Tasapainojakauma (1)

- Lähdetään jälleen liikkeelle lokaaleista tasapainoyhtälöistä:

$$\pi_i (k-i)\nu = \pi_{i+1}(i+1)\mu \qquad \text{(LBE)}$$

$$\Rightarrow \quad \pi_{i+1} = \frac{(k-i)\nu}{(i+1)\mu}\pi_i$$

$$\Rightarrow \quad \pi_i = \frac{k!}{i!(k-i)!}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^i \pi_0 = \binom{k}{i}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^i \pi_0, \quad i = 0,1,\ldots,k$$

- Sovelletaan sitten jakaumaehtoa:

$$\sum_{i=0}^{k} \pi_i = \pi_0 \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^i = 1 \qquad \text{(N)}$$

$$\Rightarrow \quad \pi_0 = \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^i\right)^{-1} = \left(1+\frac{\nu}{\mu}\right)^{-k} = \left(\frac{\mu}{\nu+\mu}\right)^k$$

Tasapainojakauma (2)

- Tasapainotilanteessa systeemissä olevien asiakkaiden lkm X noudattaa siis **binomijakaumaa**:

$$X \sim \mathrm{Bin}(k, \frac{\nu}{\nu+\mu})$$

$$P\{X = i\} = \pi_i = \binom{k}{i}(\frac{\nu}{\nu+\mu})^i(\frac{\mu}{\nu+\mu})^{k-i}, \quad i = 0,1,\ldots,k$$

$$E[X] = \frac{k\nu}{\nu+\mu}, \quad D^2[X] = k \cdot \frac{\nu}{\nu+\mu} \cdot \frac{\mu}{\nu+\mu} = \frac{k\nu\mu}{(\nu+\mu)^2}$$

- **Huom**. (insensitiivisyys)
  - Tässä tapauksessa tulos on insensitiivi **sekä** palveluajan **että** joutenoloajan jakauman suhteen
  - Voimme siis M/M/k/k/k -mallin sijasta tarkastella yleisempää G/G/k/k/k -mallia

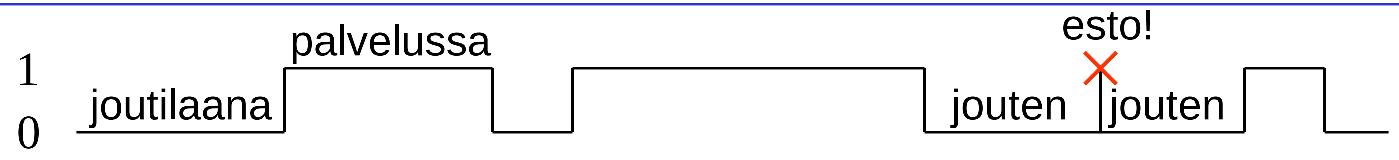
Sisältö

- Kertausta: yksinkertainen liikenneteoreettinen malli
- Poisson-malli (asiakkaita ∞, palvelijoita ∞)
- Erlang-malli (asiakkaita ∞, palvelijoita $n < \infty$)
- Binomimalli (asiakkaita $k < \infty$, palvelijoita $n = k$)
- Engset-malli (asiakkaita $k < \infty$, palvelijoita $n < k$)

Engset-malli (M/M/*n*/*n*/*k*)

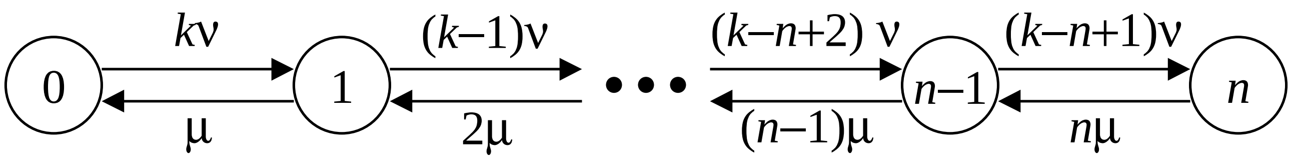
- **Engset-malli** on seuraavanlainen yksinkert. liikenneteor. malli:
  - äärellinen määrä riippumattomia asiakkaita ($k < \infty$)
    - asiakkaat **on-off-tyyppisiä** (siis välillä 'joutilaita' ja välillä 'palvelussa')
  - joutenoloajat IID noudattaen $\mathrm{Exp}(\nu)$-jakaumaa odotusarvonaan $1/\nu$
  - vähemmän palvelijoita kuin asiakkaita ($n < k$)
  - palveluajat IID noudattaen $\mathrm{Exp}(\mu)$-jakaumaa odotusarvonaan $1/\mu$
  - ei odotuspaikkoja ($m = 0$)
- **Huom**.
  - Kendallin merkinnöillä: M/M/n/n/k -jonomalli
  - ko. systeemi on **estollinen**
- On-off tyyppinen asiakas:

Oletus. Estotilanteessa (so. systeemin ollessa täysi asiakkaan halutessa palveluun) ko. asiakas aloittaa uuden joutenolo-jakson.



Tilasiirtymäkaavio

- Tark. järjestelmässä olevien asiakkaiden lkm:ää $X(t)$ ajan t funktiona
  - Oletetaan, että $X(t) = i$ jollakin hetkellä t
  - Lyhyellä aikavälillä $(t, t+h]$ voi tapahtua seuraavaa:
    - jos $i < n$, niin tn:llä $(k - i)\nu h + o(h)$ joku joutilaina olevista asiakkaista siirtyy palveluun (aiheuttaen tilasiirtymän $i \to i+1$)
    - jos $i > 0$, niin tn:llä $i\mu h + o(h)$ jonkun systeemissä olevan asiakkaan palvelu päättyy (aiheuttaen tilasiirtymän $i \to i-1$)
- Prosessi $X(t)$ on selvästikin Markov-prosessi tilasiirtymäkaavionaan



- **Huom**. Prosessi $X(t)$ on pelkistymätön sk-prosessi äärellisellä tila-avaruudella $S = \{0,1,\ldots,n\}$

Tasapainojakauma (1)

- Lähdetään jälleen liikkeelle lokaaleista tasapainoyhtälöistä:

$$\pi_i (k-i)\nu = \pi_{i+1}(i+1)\mu \qquad \text{(LBE)}$$

$$\Rightarrow \quad \pi_{i+1} = \frac{(k-i)\nu}{(i+1)\mu}\pi_i$$

$$\Rightarrow \quad \pi_i = \frac{k!}{i!(k-i)!}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^i \pi_0 = \binom{k}{i}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^i \pi_0, \quad i = 0,1,\ldots,n$$

- Sovelletaan sitten jakaumaehtoa:

$$\sum_{i=0}^{n} \pi_i = \pi_0 \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^i = 1 \qquad \text{(N)}$$

$$\Rightarrow \quad \pi_0 = \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^i \right)^{-1}$$

Tasapainojakauma (2)

- Tasapainotilanteessa systeemissä olevien asiakkaiden lkm X noudattaa siis ns. **katkaistua binomijakaumaa**:

$$P\{X=i\}=\pi_i=\frac{\binom{k}{i}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^i}{\sum_{j=0}^{n}\binom{k}{j}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^j}=\frac{\binom{k}{i}\left(\frac{\nu}{\nu+\mu}\right)^i\left(\frac{\mu}{\nu+\mu}\right)^{k-i}}{\sum_{j=0}^{n}\binom{k}{j}\left(\frac{\nu}{\nu+\mu}\right)^j\left(\frac{\mu}{\nu+\mu}\right)^{k-j}},\; i=0,1,\ldots,n$$

- **Huom**. (insensitiivisyys)
  - Tässäkin tapauksessa tulos on insensitiivi **sekä** palveluajan **että** joutenoloajan jakauman suhteen
  - Voimme siis M/M/n/n/k -mallin sijasta tarkastella yleisempää G/G/n/n/k -mallia

Aikaesto

- **Aikaesto** B_t = se osuus ajasta, jolloin systeemi on täysi = tn, että systeemi on mielivaltaisena ajanhetkenä täysi eli tilassa n = π_n:

$$B_\mathrm{t} := P\{X = n\} = \pi_n = \frac{\binom{k}{n}(\frac{\nu}{\mu})^n}{\sum_{j=0}^{n}\binom{k}{j}(\frac{\nu}{\mu})^j}$$

Kutsuesto (1)

- **Kutsuesto** B_c = niiden saapuvien kutsujen osuus, jotka menetetään = tn, että saapuva asiakas menetetään = tn, että asiakkaan saapuessa systeemi on täysi eli tilassa n
- Koska Engset-mallissa saapumisprosessi **ei** ole Poisson-prosessi (miksei?), myöskään PASTA-ominaisuutta ei voida hyödyntää kutsuestoa laskettaessa
- Kuten tullaan seuraavista kalvoista näkemään, Engset-mallissa tosiaan käy niin, että saapuvan asiakkaan näkemä tilajakauma poikkeaa edellä johdetusta tasapainojakaumasta (so. prosessin $X(t)$ stationaarisesta jakaumasta)
- Tästä taas seuraa, että (toisin kuin Erlang-mallissa) Engset-mallissa kutsu- ja aikaesto poikkeavat toisistaan

Kutsuesto (2)

- Merk. π_i*:llä tn:ttä, että saapuva asiakas näkee systeemin tilassa i
- Tarkastellaan pitkää ajanjaksoa $(0,T)$:
  - Tästä ajasta systeemi viettää keskimäärin ajan $\pi_i T$ tilassa i, minä aikana saapuu keskimäärin $(k-i)\nu\cdot\pi_i T$ asiakasta (jotka siis kaikki näkevät systeemin tilassa i)
  - Kaiken kaikkiaan aikavälillä $(0,T)$ saapuu keskimäärin $\Sigma_j\ (k-j)\nu\cdot\pi_j T$ asiakasta
- Näin ollen

$$\pi_i{*} = \frac{(k-i)\nu\cdot\pi_i T}{\sum_{j=0}^{n}(k-j)\nu\cdot\pi_j T} = \frac{(k-i)\nu\cdot\pi_i}{\sum_{j=0}^{n}(k-j)\nu\cdot\pi_j}, \quad i=0,1,\ldots,n$$

Kutsuesto (3)

- Voidaan osoittaa (osoita!) että

$$\pi_i^* = \frac{\binom{k-1}{i}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^i}{\sum_{j=0}^{n}\binom{k-1}{j}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^j}, \quad i = 0,1,\ldots,n$$

- Kun riippuvuus asiakkaiden lkm:stä k merkitään eksplisiittisesti näkyviin, saamme seuraavan tuloksen:

$$\pi_i^*(k) = \pi_i(k-1), \quad i = 0,1,\ldots,n$$

- Toisin sanoen “saapuva asiakas näkee sellaisen systeemin tasapainossa, jossa on yksi asiakas vähemmän (hän itse!)”

Kutsuesto (4)

- Valitsemalla $i = n$ saamme kutsuestolle kaavan

$$B_{\mathrm{c}}(k) = \pi_n{}^*(k) = \pi_n(k-1) = B_{\mathrm{t}}(k-1)$$

- Engset-mallissa siis kutsuesto k:n asiakkaan systeemissä on sama kuin aikaesto $k-1$:n asiakkaan systeemissä:

$$B_{\mathrm{c}}(k) = B_{\mathrm{t}}(k-1) = \frac{\binom{k-1}{n}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^n}{\sum_{j=0}^{n}\binom{k-1}{j}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^j}$$

- Tämä on **Engsetin (esto)kaava**

THE END