5. Stokastiset prosessit (1)

Sisältö

- Peruskäsitteitä
- Poisson-prosessi

Stokastiset prosessit (1)

- Tarkastellaan jotakin (liikenneteorian kannalta tai sitten muuten) kiinnostavaa järjestelmää kuvaavaa suuretta
- Tyypillisesti se **kehittyy** ajan myötä **satunnaisesti**
  - Esim. 1. varattujen kanavien lkm puhelinverkon linkissä hetkellä t tai n:nnen asiakkaan saapuessa
  - Esim. 2. pakettien lkm tilastollisen kanavointilaitteen puskurissa hetkellä t tai n:nnen asiakkaan saapuessa
- **Stokastinen prosessi** kuvaa tällaista ajan myötä satunnaisesti tapahtuvaa kehitystä
  - Millä tahansa yksittäisellä hetkellä t (tai n) järjestelmää kuvaa yksittäinen satunnaismuuttuja
  - Näin ollen stokastinen prosessi voidaan määritellä kokoelmaksi satunnaismuuttujia

Stokastiset prosessit (2)

- **Määr**. Reaaliarvoinen **stokastinen prosessi** $X = (X_t \mid t \in I)$ (stochastic process) on kokoelma satunnaismuuttujia X_t,
  - jotka saavat arvoja jossakin reaalilukujen osajoukossa S, $X_t(\omega) \in S$, ja
  - joita indeksoi reaaliarvoinen (aikaa kuvaava) parametri $t \in I$.
- Stokastisia prosesseja kutsutaan joskus myös **satunnaisprosesseiksi** (random process) tai lyhyesti **prosesseiksi**
- Indeksijoukkoa $I \subset \Re$ sanotaan prosessin **parametriavaruudeksi** (parameter space)
- Arvojoukkoa $S \subset \Re$ taas sanotaan prosessin **tila-avaruudeksi** (state space)
- **Huom**. Usein merkinnällä X_t tarkoitetaan koko prosessia (eikä pelkästään yksittäistä, johonkin tiettyyn ajanhetkeen t liittyvää satunnaismuuttujaa)

Stokastiset prosessit (3)

- Jokainen yksittäinen satunnaismuuttuja X_t on kuvaus otosavaruudelta Ω reaalilukujen joukkoon $\Re$:

$$X_t : \Omega \to \Re, \quad \omega \mapsto X_t(\omega)$$

- Stokastisen prosessin X voidaan näin ollen ajatella olevan kuvauksen otosavaruudelta Ω reaaliarvoisten funktioiden joukkoon $\Re^I$ (argumenttinaan parametri $t \in I$):

$$X : \Omega \to \Re^I, \quad \omega \mapsto X(\omega)$$

- Jokaiseen alkeistapaukseen $\omega \in \Omega$ liittyy reaaliarvoinen funktio $X(\omega)$. Funktiota $X(\omega)$ kutsutaan prosessin **reaalisatioksi** (realization) [eli **poluksi** (path) eli **trajektoriksi** (trajectory)].

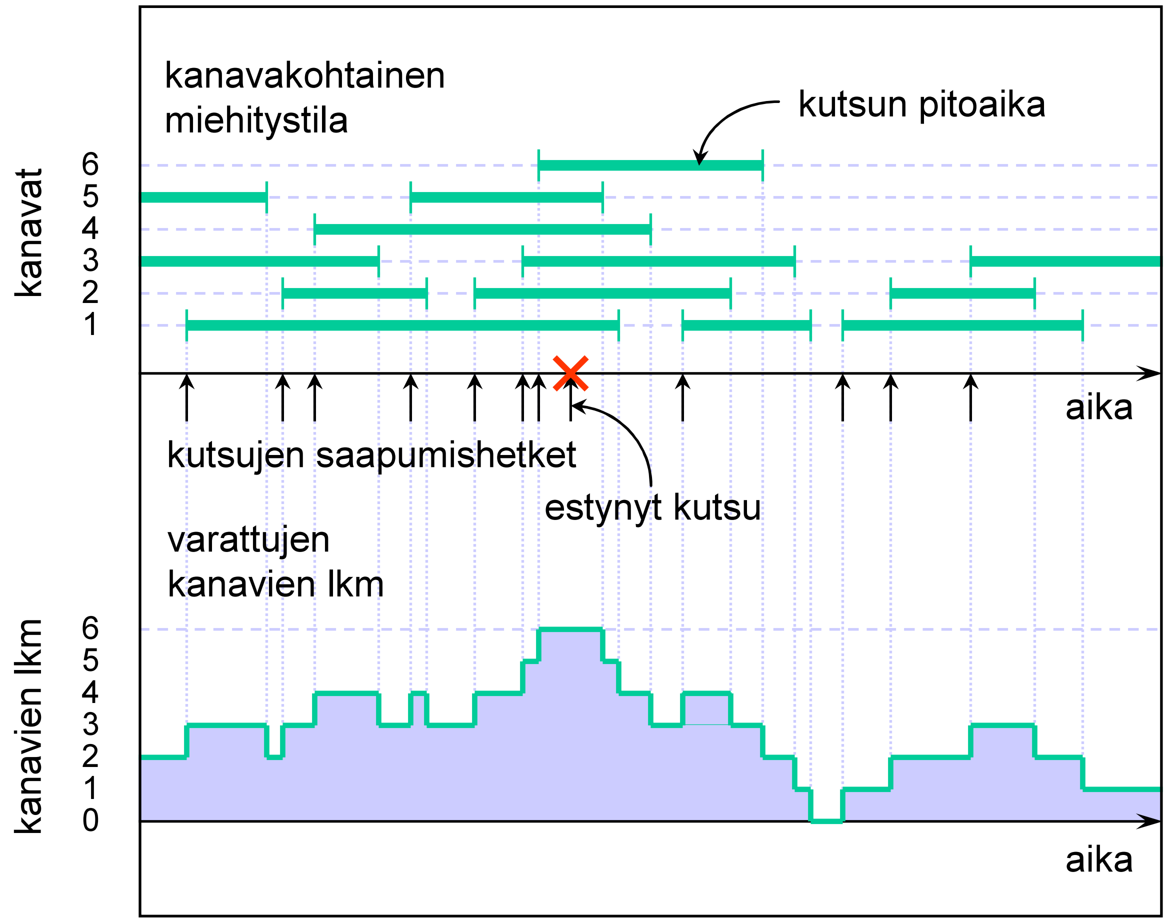
Yhteenveto

- Annetulla alkeistapauksella $\omega \in \Omega$
  - $X(\omega) = (X_t(\omega) \mid t \in I)$ on reaaliarvoinen funktio (argumenttinaan $t \in I$)
- Annetulla ajanhetkellä $t \in I$,
  - $X_t = (X_t(\omega) \mid \omega \in \Omega)$ on satunnaismuuttuja (kun $\omega \in \Omega$)
- Annetulla alkeistapauksella $\omega \in \Omega$ ja ajanhetkellä $t \in I$,
  - $X_t(\omega)$ on reaaliluku

Esimerkki

- Tarkastellaan liikenneprosessia $X = (X_t \mid t \in [0,T])$ kahden puhelinkeskuksen välisellä linkillä jollakin aikavälillä $[0,T]$
  - X_t kertoo varattujen kanavien lkm:n hetkellä t
- Alkeistapaus $\omega \in \Omega$ ilmaisee
  - mikä on varattujen kanavien lkm X_0 hetkellä 0,
  - mitkä ovat näiden X_0:n puhelun jäljelläolevat pitoajat,
  - millä ajanhetkillä saapuu uusia kutsuja, ja
  - mitkä ovat näiden uusien kutsujen pitoajat.
- Näiden tietojen perusteella on mahdollista konstruoida liikenneprosessin X reaalisaatio $X(\omega)$
  - Alkeistapaus ω siis sisältää kaiken prosessin kulkuun vaikuttavan satunnaisuuden
  - Annetulla alkeistapauksella ω prosessin reaalisaatio $X(\omega)$ on vain deterministinen reaaliarvoinen funktio

Liikenneprosessi



Prosessien luokittelusta

- Palautetaan mieliin:
  - Parametriavaruus = indeksijoukko I ($t \in I$)
  - Tila-avaruus = arvojoukko S ($X_t(\omega) \in S$)
- Luokitteluja:
  - Parametriavaruuden tyyppiin perustuva:
    - **Diskreettiaikaiset prosessit**: parametriavaruus diskreetti
    - **Jatkuva-aikaiset processes**: parametriavaruus jatkuva
  - Tila-avaruuden tyyppiin perustuva:
    - **Diskreettitilaiset prosessit**: tila-avaruus diskreetti
    - **Jatkuvatilaiset prosessit**: tila-avaruus jatkuva
- Tällä kurssilla keskitymme diskreettitilaisiin prosesseihin (jotka siis voivat olla diskreetti- tai jatkuva-aikaisia)
  - Tyypillinen prosessi kuvaa asiakkaiden lkm:ää jossakin jonosysteemissä (jolloin tila-avaruudeksi tulee $S = \{0,1,2,...\}$)

Esimerkkejä

- Diskreettiaikaisia ja diskreettitilaisia prosesseja
  - Esim. 1. varattujen kanavien lkm puhelinverkon linkissä n:nnen kutsun saapuessa, $n = 1,2,...$
  - Esim. 2. pakettien lkm tilastollisen kanavointilaitteen puskurissa n:nnen paketin saapuessa, $n = 1,2,...$
- Jatkuva-aikaisia ja diskreettitilaisia prosesseja
  - Esim. 3. varattujen kanavien lkm puhelinverkon linkissä hetkellä $t > 0$
  - Esim. 4. pakettien lkm tilastollisen kanavointilaitteen puskurissa hetkellä $t > 0$

Merkintöjä

- **Diskreettiaikaiselle prosessille**
  - parametriavaruus on tyypillisesti kaikkien positiivisten kokonaislukujen joukko, $I = \{1,2,\ldots\}$
  - indeksi t korvataan tällöin (usein) indeksillä n: X_n, $X_n(\omega)$

- **Jatkuva-aikaiselle prosessille**
  - parametriavaruus on tyypillisesti joko jokin äärellinen väli, $I = [0, T]$, tai sitten kaikkien ei-negatiivisten reaalilukujen joukko, $I = [0, \infty)$
  - indeksi t kirjoitetaan tällöin (usein) prosessia kuvaavan symbolin jälkeen sulkuihin (eikä alaindeksiksi): $X(t)$, $X(t;\omega)$

Jakauma

- Stokastisen prosessin **jakauman** (distribution) määräävät sen **äärellisulotteiset jakaumat** (finite-dimensional distributions)

$$P\{X_{t_1} \le x_1, \ldots, X_{t_n} \le x_n\}$$

missä $t_1, \ldots, t_n \in I$, $x_1, \ldots, x_n \in S$ ja $n = 1,2,\ldots$

- Yleensä näiden äärellisulotteistenkaan jakaumien määrääminen ei ole helppoa satunnaismuuttujien X_t välisten **riippuvuuksien** vuoksi
- Diskreettitilaiselle prosessille riittää tarkastella tyyppiä

$$P\{X_{t_1} = x_1, \ldots, X_{t_n} = x_n\}$$

olevia todennäköisyyksiä (vrt. diskreetin sm:n ptnf vs. kf)

Riippuvuus

- Kaikkein yksinkertaisin (mutta ei kovinkaan kiinnostava) esimerkki stokastisesta prosessista saadaan ottamalla joukko **täydellisesti riippumattomia** satunnaismuuttujia X_t. Tällöin

$$P\{X_{t_1} \le x_1, \ldots, X_{t_n} \le x_n\} = P\{X_{t_1} \le x_1\} \cdots P\{X_{t_n} \le x_n\}$$

- Yksinkertaisin ei-triviaali esimerkki on **Markov-prosessi**. Diskreettitilaiselle Markov-prosessille pätee

$$P\{X_{t_1} = x_1, \ldots, X_{t_n} = x_n\} =$$
$$P\{X_{t_1} = x_1\} \cdot P\{X_{t_2} = x_2 \mid X_{t_1} = x_1\} \cdots P\{X_{t_n} = x_n \mid X_{t_{n-1}} = x_{n-1}\}$$

- Tämä liittyy ns. **Markov-ominaisuuteen**:
  - Jos Markov-prosessin nykytila tunnetaan, prosessin tulevaisuus ei mitenkään riipu prosessin aiemmasta menneisyydestä (eli siitä, *miten* nykytilaan on tultu).

Stationaarisuus

- **Määr**. Stokastinen prosessi X on **stationaarinen** (stationary), jos kaikki äärellisulotteiset jakaumat ovat ajan siirron suhteen invariantteja, ts.

$$P\{X_{t_1+\Delta} \le x_1, \ldots, X_{t_n+\Delta} \le x_n\} = P\{X_{t_1} \le x_1, \ldots, X_{t_n} \le x_n\}$$

kaikilla Δ, n, $t_1,\ldots, t_n$ ja $x_1,\ldots, x_n$

- **Seuraus**: Valinnalla $n = 1$ nähdään, että stationaarisen prosessin kaikki yksittäiset satunnaismuuttujat X_t ovat samoin jakautuneita, ts.

$$P\{X_t \le x\} = F(x)$$

kaikilla $t \in I$. Ko. jakaumaa sanotaan prosessin **stationaariseksi jakaumaksi** (stationary distribution).

Stokastiset prosessit liikenneteoriassa

- Tällä kurssilla (ja liikenneteoriassa yleisemminkin) stokastisilla prosessilla kuvataan
  - **saapumisprosessia** (arrival process), so. asiakkaiden saapumista johonkin järjestelmään
  - **tilaprosessia** (state process), so. ko. järjestelmän tilaa
- **Huom**. Jälkimmäisestä käytetään myös nimitystä **liikenneprosessi** (traffic process)

Saapumisprosessi

- Saapumisprosessi voidaan kuvata
  - joko **pisteprosessina** $(\tau_n \mid n = 1,2,\ldots)$, missä τ_n kertoo n:nnen asiakkaan saapumishetken (diskreettiaikainen, jatkuvatilainen)
    - kasvava: $\tau_{n+1} \geq \tau_n$ kaikilla n
      - näin ollen epästationaarinen!
    - yleensä oletetaan, että saapumisten väliset väliajat $\tau_n - \tau_{n\text{-}1}$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita (IID) $\Rightarrow$ uusiutumisprosessi
    - tällöin riittää määritellä väliaikojen jakauma
    - eksponentiaalisesti jakautuneet väliajat $\Rightarrow$ Poisson-prosessi
  - tai **laskuriprosessina** $(A(t) \mid t \geq 0)$, missä $A(t)$ kertoo hetkeen t mennessä saapuneiden asiakkaiden lkm:n (jatkuva-aikainen, diskreettitilainen)
    - kasvava: $A(t + \Delta) \geq A(t)$ kaikilla $t,\Delta \geq 0$
      - näin ollen epästationaarinen!
    - riippumattomat lisäykset, missä $A(t + \Delta) - A(t)$ noudattaa $\text{Poisson}(\lambda\Delta)$-jakaumaa $\Rightarrow$ Poisson-prosessi

Tilaprosessi

- Yksinkertaisessa tapauksessa
  - systeemin tilaa kuvaa pelkkä kokonaisluku
    - esim. asiakkaiden lkm $X(t)$ hetkellä t
- Monimutkaisemmassa tapauksessa
  - systeemin tilana on kokonaislukuarvoinen vektori
    - esim. esto- ja jonoverkkomallit
- Tyypillisesti ollaan kiinnostuneita,
  - onko tilaprosessilla stationaarista jakaumaa
  - ja jos on, mikä se on
- **Huom**. Vaikka systeemin tila ei noudattaisikaan alkuhetkellä 0 stationaarista jakaumaa, monessa tapauksessa tilajakauma lähestyy sitä, kun $t \to \infty$

Sisältö

- Peruskäsitteitä
- Poisson-prosessi

Bernoulli-prosessi

- **Määr**. **Bernoulli-prosessi** $(X_n \mid n = 1,2,...)$ onnistumistodennäköisyytenään p on sarja riippumattomia Bernoulli-toistokokeita (joissa kaikissa onnistumistodennäköisyys on vakio p)
- Kyseessä on selvästikin diskreettiaikainen ja diskreettitilainen prosessi
  - Parametriavaruus: $I = \{1,2,\dots\}$
  - Tila-avaruus: $S = \{0,1\}$
- Äärellisulotteiset jakaumat (huom. X_n:t ovat IID):

$$P\{X_1 = x_1,...,X_n = x_n\} = P\{X_1 = x_1\}\cdots P\{X_n = x_n\}$$
$$= \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_i x_i}(1-p)^{n-\sum_i x_i}$$

- Bernoulli-prosessi on stationaarinen (stat. jak.: Bernoulli(p)-jakauma)

Poisson-prosessin määritelmä

- Bernoulli-prosessin jatkuva-aikainen vastine on Poisson-prosessi
  - kyseessä on pisteprosessi $(\tau_n \mid n = 1,2,...)$, missä τ_n kertoo n:nnen tapahtuman (esim. asiakkaan saapuminen) tapahtumahetken
  - Bernoulli-prosessin 'epäonnistumista' vastaa 'asiakkaan saapuminen'
- **Määr**. **1**. Pisteprosessia $(\tau_n \mid n = 1,2,...)$ sanotaan **Poisson-prosessiksi** intensiteettinään λ, jos lyhyellä aikavälillä $(t, t+h]$ saapuu uusi asiakas tn:llä $\lambda h + o(h)$ (muista aikaväleistä riippumatta)
  - $o(h)$ viittaa sellaiseen funktioon, jolle $o(h)/h \to 0$, kun $h \to 0$
  - uusia asiakkaita saapuu vakiointensiteetillä λ: $(\lambda h + o(h))/h \to \lambda$
  - tn, että välille $(t, t+h]$ ei satu saapumista on $1 - \lambda h + o(h)$
- Näin määriteltynä Poisson-prosessi on diskreettiaikainen ja jatkuvatilainen
  - parametriavaruus: $I = \{1,2,\ldots\}$
  - tila-avaruus: $S = (0, \infty)$

Poisson-prosessi, toinen määritelmä

- Tarkastellaan kahden saapumisen väliaikaa $\tau_n - \tau_{n\text{-}1}$ (merk. $\tau_0 = 0$)
  - Koska saapumisintensiteetti pysyy vakiona, väliajan päättyminen lyhyellä aikavälillä $(t, t{+}h]$, kun se on jo kestänyt ajan t, ei riipu t:stä (eikä muista aiemmista saapumisista)
  - Näin ollen saapumisten väliajat ovat riippumattomia ja lisäksi niillä on ns. unohtavaisuusominaisuus, mikä ominaisuus jatkuvista jakaumista on vain eksponenttijakaumalla
- **Määr**. **2**. Pisteprosessia $(\tau_n \mid n = 1,2,\ldots)$ sanotaan **Poisson-prosessiksi** intensiteettinään λ, jos saapumisten väliajat $\tau_n - \tau_{n-1}$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita (IID) yhteisenä jakaumanaan $\mathrm{Exp}(\lambda)$

Poisson-prosessi, kolmas määritelmä (1)

- Tarkastellaan lopuksi välillä $[0,t]$ saapuneiden asiakkaiden lkm:ää $A(t)$
  - Bernoulli-prosessissa kiinteällä aikavälillä sattuneiden epäonnistumisten lkm noudattaa binomijakaumaa. Kun aikaväliä lyhennetään, saadaan sopivasti skaalaamalla rajatapauksena Poisson-jakauma.
  - Huom. $A(0) = 0$
- **Määr**. **3**. Laskuriprosessia $(A(t) \mid t \geq 0)$ sanotaan **Poisson-prosessiksi** intensiteettinään λ, jos ko. prosessin lisäykset yhteispisteettömillä väleillä ovat riippumattomia ja noudattavat Poisson-jakaumaa seuraavasti:

$$A(t+\Delta) - A(t) \sim \mathrm{Poisson}(\lambda\Delta)$$

- Näin määriteltynä Poisson-prosessi on jatkuva-aikainen ja diskreettitilainen
  - parametriavaruus: $I = [0, \infty)$
  - tila-avaruus: $S = \{0,1,2,\dots\}$

Poisson-prosessi, kolmas määritelmä (2)

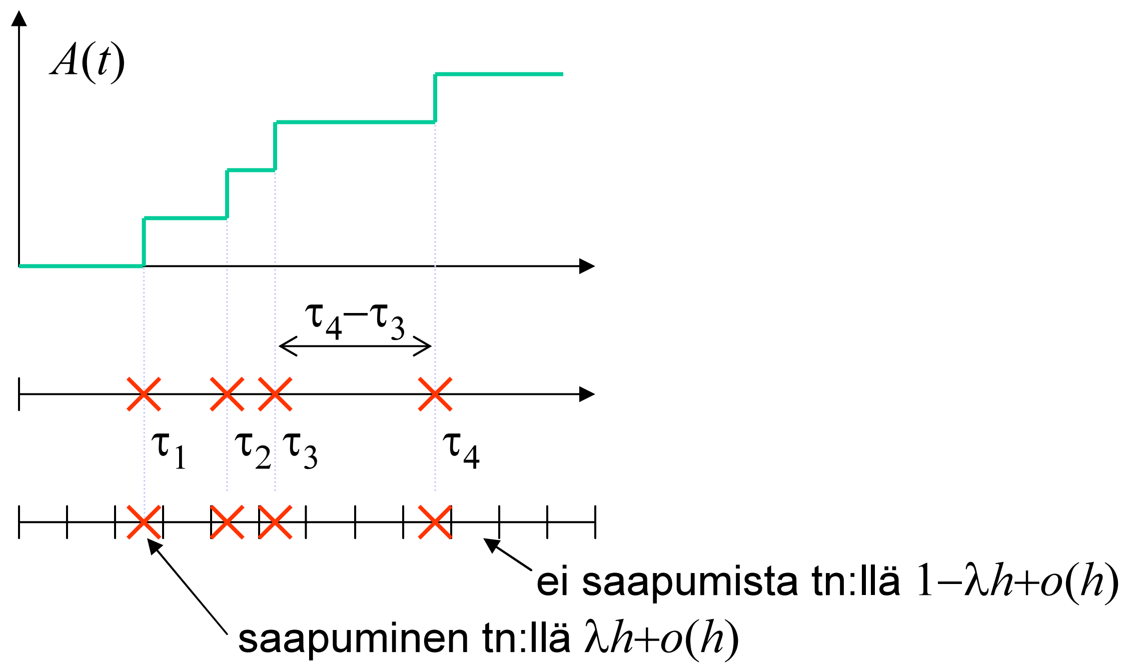
- Yksiulotteinen jakauma: $A(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$
  - $E[A(t)] = \lambda t$, $D^2[A(t)] = \lambda t$
- Äärellisulotteiset jakaumat (eri välien riippumattomuuden nojalla):

$$
\begin{aligned}
&P\{A(t_1) = x_1, \ldots, A(t_n) = x_n\} = \\
&\quad P\{A(t_1) = x_1\} P\{A(t_2) - A(t_1) = x_2 - x_1\} \cdots \\
&\quad P\{A(t_{n-1}) - A(t_n) = x_n - x_{n-1}\}
\end{aligned}
$$

- **Huom**. Laskuriprosessina määritelty Poisson-prosessi ei ole stationaarinen, mutta sillä on stationaariset lisäykset
  - ei siis stationaarista jakaumaakaan mutta riippumattomat ja samoin jakautuneet lisäykset

Kolme eri tapaa luonnehtia Poisson-prosessia

- Voidaan osoittaa, että kaikki kolme Poisson-prosessin määritelmää ovat yhtäpitäviä



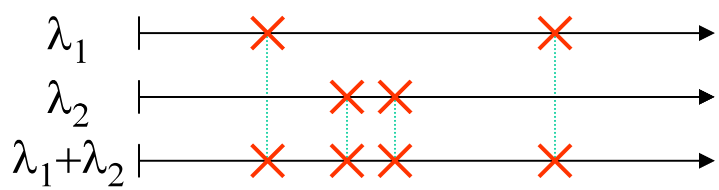
Poisson-prosessin ominaisuuksia (1)

- **Ominaisuus 1** (**Summa**): Olkoot $A_1(t)$ ja $A_2(t)$ riippumattomia Poisson-prosesseja intensiteetein λ_1 ja λ_2. Tällöin niiden summaprosessi (eli ns. superpositio) $A_1(t) + A_2(t)$ on Poisson-prosessi intensiteetillä $\lambda_1 + \lambda_2$.
- **Tod**. Tarkastellaan lyhyttä aikaväliä $(t, t{+}h]$:
  - tn, ettei ko. välille satu saapumisia kummassakaan prosessissa, on

$$(1-\lambda_1 h + o(h))(1-\lambda_2 h + o(h)) = 1-(\lambda_1 + \lambda_2)h + o(h)$$

  - toisaalta, täsmälleen yhden saapumisen tn on

$$\begin{aligned}&(\lambda_1 h + o(h))(1-\lambda_2 h + o(h)) + (1-\lambda_1 h + o(h))(\lambda_2 h + o(h))\\ &= (\lambda_1 + \lambda_2)h + o(h)\end{aligned}$$



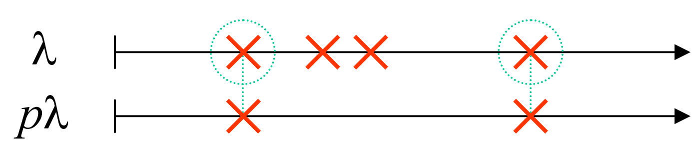
Poisson-prosessin ominaisuuksia (2)

- **Ominaisuus 2** (**Satunnaispoiminta**): Olkoon τ_n Poisson-prosessi intensiteettinään λ. Merk. σ_n:llä osaprosessia, johon on valittu pisteet alkuperäisestä prosessista τ_n satunnaisesti ja riippumattomasti poimimalla (tn:llä p). Tällöin σ_n on Poisson-prosessi intensiteetillä $p\lambda$.
- **Tod**. Tarkastellaan lyhyttä aikaväliä $(t, t{+}h]$:
  - tn, ettei ko. välillä ole saapumisia satunnaispoiminnan jälkeen, on

$$(1-\lambda h+o(h))+(1-p)(\lambda h+o(h))=1-p\lambda h+o(h)$$

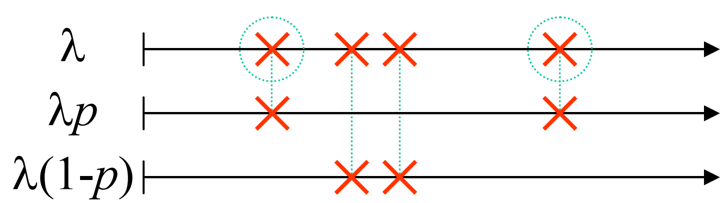
  - toisaalta, täsmälleen yhden saapumisen tn on

$$p(\lambda h+o(h))=p\lambda h+o(h)$$



Poisson-prosessin ominaisuuksia (3)

- **Ominaisuus 3** (**Satunnaislajittelu**): Olkoon τ_n Poisson-prosessi intensiteettinään λ. Merk. $\sigma_n^{(1)}$:llä osaprosessia, johon on valittu pisteet alkuperäisestä prosessista τ_n satunnaisesti ja riippumattomasti poimimalla (tn:llä p), ja $\sigma_n^{(2)}$:llä jäljelle jäävistä pisteistä muodostettua osaprosessia. Tällöin $\sigma_n^{(1)}$ ja $\sigma_n^{(2)}$ ovat riippumattomia Poisson-prosesseja intensiteeteillä $p\lambda$ ja $(1-p)\lambda$.
- **Tod**. Ominaisuuden 2 nojalla riittäisi osoittaa, että prosessit ovat riippumattomia. Todistus kuitenkin sivuutetaan tällä kurssilla.



Poisson-prosessin ominaisuuksia (4)

- **Ominaisuus 4** (**PASTA**): Tarkastellaan (stabiilia) järjestelmää, johon saapuu uusia asiakkaita Poisson-prosessin mukaisesti. Merkitään $X(t)$:llä systeemin tilaa hetkellä t (jatkuva-aikainen prosessi) ja Y_n:llä systeemin tilaa n:nnen asiakkaan saapumishetkellä (diskreettiaikainen prosessi). Näillä kahdella prosessilla on täsmälleen sama stationaarinen jakauma.
- Voidaan siis sanoa, että
  - "saapuva asiakas näkee systeemin tasapainotilassa"
  - PASTA = "Poisson Arrivals See Time Averages"
- Huom. PASTA-ominaisuus on Poisson-prosessin erityisominaisuus
  - eikä se siis ole voimassa muille saapumisprosesseille
  - Tarkastellaan esim. systeemiä, jossa on vain yksi on-off-tyyppinen asiakas ("oma PC"). Poistuttuaan systeemistä, sama asiakas palaa sinne satunnaisen ajan kuluttua. Tällainen asiakas näkee systeemin aina tyhjänä sinne saapuessaan. Sen sijaan jatkuvassa ajassa tarkasteltuna ko. systeemi on vain ajoittain tyhjänä.

Esimerkki (1)

- Yhteyspyyntöjä tulee palvelimelle Poisson-prosessin mukaisesti intensiteetillä $\lambda = 5$ kertaa minuutissa.
  - Mikä on todennäköisyys tapahtumalle, että seuraavan kolmenkymmenen sekunnin aikana tulee täsmälleen 2 pyyntöä?
    - Aikavälissä saapuneiden yhteyspyyntöjen lukumäärä on Poisson-jakautunut parametrilla $\lambda\Delta = 5/60 \cdot 30 = 2.5$

$$A(t+30) - A(t) \sim \text{Poisson}(2.5)$$

$$P\{A(t+30) - A(t) = 2\} = \tfrac{2.5^2}{2!} e^{-2.5} = 0.257$$

Esimerkki (2)

- Tarkastellaan edelleen samaa järjestelmää.
  - Palvelimelle on juuri saapunut uusi yhteyspyyntö. Mikä on todennäköisyys, että seuraava pyyntö tapahtuu vasta yli 30 sekunnin kuluttua?
    - Tarkastellaan prosessia pisteprosessina. Kahden peräkkäisen tapahtuman väliaika noudattaa eksponenttijakaumaa parametrilla λ

$$P\{\tau_{i+1} - \tau_i \geq 30\} = 1 - P\{\tau_{i+1} - \tau_i \leq 30\} = e^{-5/60\cdot 30} = e^{-2.5} = 0.082$$

- Tarkastellaan prosessia laskuriprosessina, vrt. kalvo 29. Nyt kysymys voidaan muotoilla: ”Mikä on todennäköisyys tapahtumalle, että seuraavan 30s aikana ei tule yhtään yhteyspyyntöä?”.

$$P\{A(t+30) - A(t) = 0\} = \tfrac{2.5^0}{0!} e^{-2.5} = e^{-2.5} = 0.082$$