6. Stokastiset prosessit (2)

Sisältö

- Markov-prosessit
- Syntymä-kuolema-prosessit

Markov-prosessi

- Tark. jatkuva-aikaista ja diskreettitilaista stokastista prosessia $X(t)$
  - joko tila-avaruudella $S = \{0,1,\ldots,N\}$ tai $S = \{0,1,...\}$
- **Määr**. Prosessi $X(t)$ on **Markov-prosessi**, jos

$$P\{X(t_{n+1}) = x_{n+1} \mid X(t_1) = x_1, \ldots, X(t_n) = x_n\} =$$
$$P\{X(t_{n+1}) = x_{n+1} \mid X(t_n) = x_n\}$$

kaikilla n, $t_1 < \ldots < t_{n+1}$ ja $x_1, \ldots, x_{n+1}$

- Tätä ehtoa sanotaan **Markov-ominaisuudeksi**
  - Jos Markov-prosessin nykytila tunnetaan, prosessin tulevaisuus ei mitenkään riipu prosessin aiemmasta menneisyydestä (eli siitä, *miten* nykytilaan on tultu)
  - Nykytila siis sisältää kaiken jatkon kannalta tarpeellisen informaation

Esimerkki

- Riippumattomien lisäysten prosessi $X(t)$ on aina Markov-prosessi:

$$X(t_n) = X(t_{n-1}) + (X(t_n) - X(t_{n-1}))$$

- **Seuraus**: Poisson-prosessi $A(t)$ on Markov-prosessi
  - Määritelmän 3 mukaan Poisson-prosessin lisäykset ovat riippumattomia

Aikahomogeenisuus

- **Määr**. Markov-prosessi $X(t)$ on **aikahomogeeninen**, jos

$$P\{X(t+\Delta)=y \mid X(t)=x\} = P\{X(\Delta)=y \mid X(0)=x\}$$

kaikilla $t,\ \Delta \geq 0$ ja $x, y \in S$

  - Tn:t $P\{X(t+\Delta)=y \mid X(t)=x\}$ eivät siis riipu t:stä

Tilasiirtymäintensiteetit

- Tarkastellaan aikahomogeenista Markov-prosessia $X(t)$
- **Tilasiirtymäintensiteetit** q_{ij} (state transition rate), missä $i, j \in S$, määritellään seuraavasti:

$$q_{ij} := \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} P\{X(h) = j \mid X(0) = i\}$$

- Tilatn:t $P\{X(t) = i\}$, $i \in S$, määräytyvät yksikäsitteisesti siirtymä-intensiteeteistä q_{ij}, kunhan ns. **alkujakauma** (initial distribution) eli tn:t $P\{X(0) = i\}$, $i \in S$, on annettu
- **Huom**. Jatkossa rajoitamme tarkastelumme pelkästään aikahomogeenisiin Markov-prosesseihin

Eksponentiaalisesti jakautuneet tilassaoloajat

- Oletetaan, että Markov-prosessi on tilassa i hetkellä t.
- Lyhyellä aikavälillä $(t, t+h]$ prosessi siirtyy uuteen tilaan j tn:llä $q_{ij}h + o(h)$ (riippumatta siitä, mitä tapahtui ennen hetkeä t)
- Merkitään q_i:llä kokonaisintensiteettiä siirtyä pois tilasta i, ts.

$$q_i := \sum_{j \neq i} q_{ij}$$

- Lyhyellä aikavälillä $(t, t+h]$ prosessi siirtyy pois tilasta i tn:llä $q_i h + o(h)$ (riippumatta siitä, mitä tapahtui ennen hetkeä t)
- Kyseessä on selvästikin ns. unohtavaisuusominaisuus
- Tilassa i vietetty aika noudattaa siis eksponenttijakaumaa intensiteettinään q_i

Tilasiirtymätodennäköisyydet

- Merkitään T_i:llä oloaikaa tilassa i ja T_{ij}:llä sellaista (potentiaalista) oloaikaa tilassa i, joka päättyy siirtymään tilaan j:

$$T_i \sim \mathrm{Exp}(q_i), \quad T_{ij} \sim \mathrm{Exp}(q_{ij})$$

- Sm T_i voidaan ajatella riippumattomien ja eksponentiaalisesti jakautuneiden sm:ien T_{ij} minimiksi (ks. luennon 5 kalvo 44):

$$T_i = \min_{j \neq i} T_{ij}$$

- Merk. p_{ij}:llä tn:ttä, että toteutunut siirtymä on tilasta i tilaan j. Ko. **tilasiirtymätodennäköisyydet** (state transition probabilities) saadaan kaavalla

$$p_{ij} = P\{T_i = T_{ij}\} = \frac{q_{ij}}{q_i}$$

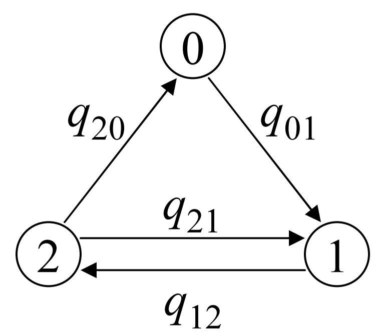
Tilasiirtymäkaavio

- Aikahomogeeninen Markov-prosessi esitetään usein ns. **tilasiirtymäkaavion** (state transition diagram) avulla. Kyseessä on suunnattu verkko, jonka
  - solmut vastaavat prosessin tiloja ja
  - yksisuuntaiset linkit vastaavat mahdollisia tilasiirtymiä

$$\text{linkki tilasta } i \text{ tilaan } j \quad \Leftrightarrow \quad q_{ij} > 0$$

- **Esim**. Kolmitilainen Markov-prosessi ($S = \{0,1,2\}$):

$$Q = \begin{pmatrix} - & + & 0 \\ 0 & - & + \\ + & + & - \end{pmatrix}$$



Pelkistymättömyys

- **Määr**. Tilasta i **pääsee** tilaan j ($i \to j$), jos tilasiirtymäkaaviosta löytyy suunnattu polku i:stä j:hin
  - Jos näin on, niin lähdettäessä tilasta i tilassa j käydään (joskus tulevaisuudessa) positiivisella tn:llä
- **Määr**. Tilat i ja j **kommunikoivat** ($i \leftrightarrow j$), jos $i \to j$ ja $j \to i$
- **Määr**. Markov-prosessi on **pelkistymätön** (irreducible), jos kaikki tilat kommunikoivat keskenään
  - Esimerkiksi edellisellä kalvolla esitetty Markov-prosessi on pelkistymätön

Tasapainojakauma ja globaalit tasapainoyhtälöt

- Tark. pelkistymätöntä Markov-prosessia $X(t)$ siirtymäintensiteetein q_{ij}
- **Määr**. Olkoon $\pi = (\pi_i \mid \pi_i \geq 0,\ i \in S)$ tila-avaruudessa S määritelty jakauma, ts. se toteuttaa ns. **normeerausehdon**

$$\sum_{i \in S} \pi_i = 1 \qquad \text{(N)}$$

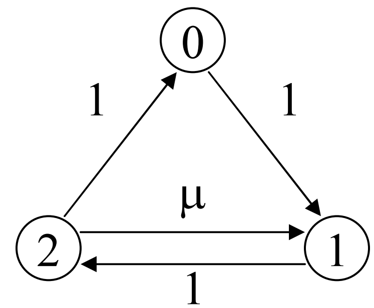
Jakauma π on prosessin $X(t)$ **tasapainojakauma** (equilibrium distribution), jos seuraavat **globaalit tasapainoehdot** (global balance equations) ovat voimassa kaikilla $i \in S$:

$$\sum_{j \neq i} \pi_i q_{ij} = \sum_{j \neq i} \pi_j q_{ji} \qquad \text{(GBE)}$$

- On mahdollista, ettei prosessilla ole tasapainojakaumaa. Kuitenkin, jos esim. tila-avaruus on äärellinen, tasapainojakauma on aina olemassa.
- Valitsemalla tasapainojakauma alkujakaumaksi (ts. $P\{X(0) = i\} = \pi_i$), ko. Markov-prosessista tulee stationaarinen (stationaarisena jakaumanaan π)

Esimerkki

$$Q = \begin{pmatrix} - & 1 & 0 \\ 0 & - & 1 \\ 1 & \mu & - \end{pmatrix}$$



$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \qquad \text{(N)}$$

$$\begin{aligned} \pi_0 \cdot 1 &= \pi_2 \cdot 1 \\ \pi_1 \cdot 1 &= \pi_0 \cdot 1 + \pi_2 \cdot \mu \\ \pi_2 \cdot (1+\mu) &= \pi_1 \cdot 1 \end{aligned} \qquad \text{(GBE)}$$

$$\Rightarrow \quad \pi_0 = \frac{1}{3+\mu}, \quad \pi_1 = \frac{1+\mu}{3+\mu}, \quad \pi_2 = \frac{1}{3+\mu}$$

Lokaalit tasapainoyhtälöt ja kääntyvyys

- Tarkastellaan edelleen pelkistymätöntä Markov-prosessia $X(t)$ siirtymä-intensiteetein q_{ij}
- **Väite**. Olkoon $\pi = (\pi_i \mid \pi_i \geq 0,\ i \in S)$ tila-avaruudessa S määritelty jakauma, ts.

$$\textstyle\sum_{i \in S} \pi_i = 1 \qquad \text{(N)}$$

Jos seuraavat **lokaalit tasapainoehdot** (local balance equations) ovat voimassa kaikilla $i,j \in S$:

$$\pi_i q_{ij} = \pi_j q_{ji} \qquad \text{(LBE)}$$

niin π on prosessin tasapainojakauma.

- **Tod**. (GBE):t seuravat (LBE):istä summaamalla $j \neq i$
- Tässä tapauksessa ko. Markov-prosessia sanotaan **kääntyväksi** (reversible)

Sisältö

- Markov-prosessit
- Syntymä-kuolema-prosessit

Syntymä-kuolema-prosessi

- Tark. jatkuva-aikaista ja diskreettitilaista Markov-prosessia $X(t)$
  - joko tila-avaruudella $S = \{0,1,\ldots,N\}$ tai $S = \{0,1,...\}$
- **Määr**. Markov-prosessi $X(t)$ on **syntymä-kuolema-prosessi** (birth-death process), jos tilasiirtymät ovat mahdollisia vain vierekkäisten tilojen välillä, ts.

$$|i-j|>1 \quad \Rightarrow \quad q_{ij}=0$$

- Tässä tapauksessa merkitään

$$\mu_i := q_{i,i-1} \geq 0$$

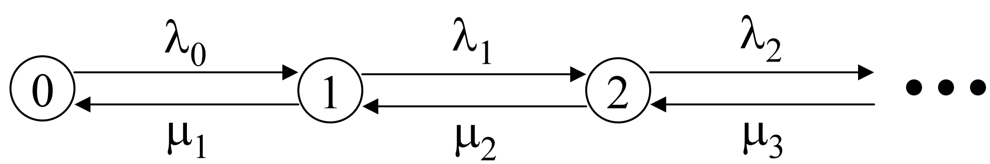
$$\lambda_i := q_{i,i+1} \geq 0$$

  - Huom. $\mu_0 = 0$ ja $\lambda_N = 0$ (kun $N < \infty$)

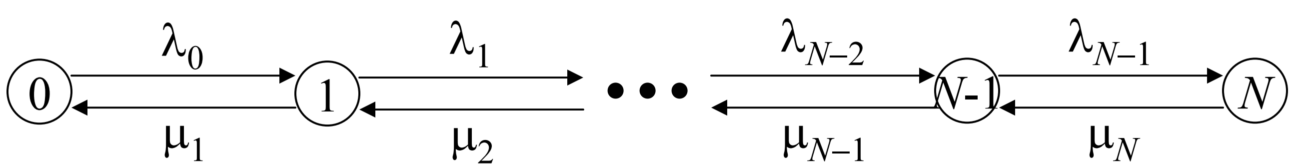
Pelkistymättömyys

- **Väite**: Syntymä-kuolema-prosessi on pelkistymätön, jos ja vain jos $\lambda_i > 0$ kaikilla $i \in S\backslash\{N\}$ ja $\mu_i > 0$ kaikilla $i \in S\backslash\{0\}$

- Ääretöntilaisen pelkistymättömän sk-prosessin tilasiirtymäkaavio:



- Äärellistilaisen pelkistymättömän sk-prosessin tilasiirtymäkaavio:



Tasapainojakauma (1)

- Tarkastellaan pelkistymätöntä syntymä-kuolema-prosessia $X(t)$
- Tarkoitus on johtaa tasapainojakauma $\pi = (\pi_i \mid i \in S)$, mikäli sellainen on olemassa
- Lokaalit tasapainoyhtälöt:

$$\pi_i \lambda_i = \pi_{i+1} \mu_{i+1} \qquad \text{(LBE)}$$

- Näin ollen

$$\pi_{i+1} = \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \pi_i \quad \Rightarrow \quad \pi_i = \pi_0 \prod_{j=1}^{i} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}$$

- Jakaumaehto eli normeerausehto:

$$\sum_{i \in S} \pi_i = \pi_0 \sum_{i \in S} \prod_{j=1}^{i} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} = 1 \qquad \text{(N)}$$

Tasapainojakauma (2)

- Tasapainojakauma on siis olemassa täsmälleen silloin, kun

$$\sum_{i \in S} \prod_{j=1}^{i} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} < \infty$$

- **Äärellinen tila-avaruus**:
  Ko. summa on aina äärellinen. Tasapainojakaumaksi tulee

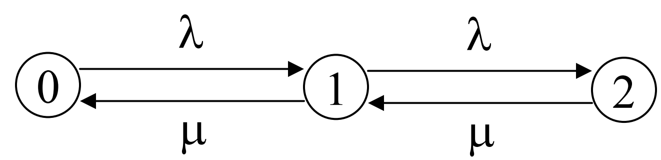
$$\pi_i = \pi_0 \prod_{j=1}^{i} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}, \qquad \pi_0 = \left(1 + \sum_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{i} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}\right)^{-1}$$

- **Ääretön tila-avaruus**:
  Jos ko. summa on äärellinen, niin tasapainojakaumaksi tulee

$$\pi_i = \pi_0 \prod_{j=1}^{i} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}, \qquad \pi_0 = \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{i} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}\right)^{-1}$$

Esimerkki

$$Q = \begin{pmatrix} - & \lambda & 0 \\ \mu & - & \lambda \\ 0 & \mu & - \end{pmatrix}$$



$$\pi_i \lambda = \pi_{i+1} \mu$$

$$\Rightarrow \quad \pi_{i+1} = \rho \pi_i \quad (\rho := \lambda / \mu) \qquad \text{(LBE)}$$

$$\Rightarrow \quad \pi_i = \pi_0 \rho^i$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = \pi_0 (1 + \rho + \rho^2) = 1 \qquad \text{(N)}$$

$$\Rightarrow \quad \pi_i = \frac{\rho^i}{1 + \rho + \rho^2}$$

Puhdas syntymäprosessi

- **Määr**. Syntymä-kuolema-prosessi on **puhdas syntymäprosessi**, jos $\mu_i = 0$ kaikilla $i \in S$
- Ääretöntilaisen syntymäprosessin tilasiirtymäkaavio:

$$0 \xrightarrow{\lambda_0} 1 \xrightarrow{\lambda_1} 2 \xrightarrow{\lambda_2} \bullet\bullet\bullet$$

- Äärellistilaisen syntymäprosessin tilasiirtymäkaavio:

$$0 \xrightarrow{\lambda_0} 1 \xrightarrow{\lambda_1} \bullet\bullet\bullet \xrightarrow{\lambda_{N-2}} N\text{-}1 \xrightarrow{\lambda_{N-1}} N$$

- Esimerkiksi Poisson-prosessi on ääretöntilainen puhdas syntymä-prosessi (intensiteetein $\lambda_i = \lambda$ kaikilla $i \in S = \{0,1,\ldots\}$)
- **Huom**. Puhdas syntymäprosessi ei ole koskaan pelkistymätön (saati sitten stationaarinen).