

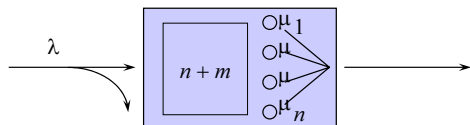
7. Menetysjärjestelmät

Sisältö

- Kertausta: yksinkertainen liikenneteoreettinen malli
- Poisson-malli (asiakkaita ∞ , palvelijoita ∞)
- Sovellus virtaavan dataliikenteen mallintamiseen vuotasolla
- Erlang-malli (asiakkaita ∞ , palvelijoita $n < \infty$)
- Sovellus puhelinliikenteen mallintamiseen runkoverkossa
- Binomimalli (asiakkaita $k < \infty$, palvelijoita $n = k$)
- Engset-malli (asiakkaita $k < \infty$, palvelijoita $n < k$)
- Sovellus puhelinliikenteen mallintamiseen liityntäverkossa

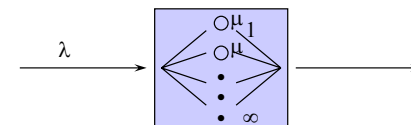
Yksinkertainen liikenneteoreettinen malli

- **Asiakkaita saapuu** keskimäärin nopeudella λ (asiakasta per aikayks.)
 - $1/\lambda$ = keskimääräinen asiakkaiden väliaika
- **Asiakkaita palvelee** n :llä rinnakkaisella palvelijalla
- Kukin palvelija palvelee keskim. nopeudella μ (asiakasta per aikayks.)
 - $1/\mu$ = keskimääräinen asiakkaan palveluaika
- Järjestelmässä on $n + m$ **asiakaspaikkaa**
 - vähintään n palvelupaikkaa ja korkeintaan m odotuspaikkaa
- Estyvät asiakkaat (joiden saapuessa järjestelmä on **täysi**) menetetään



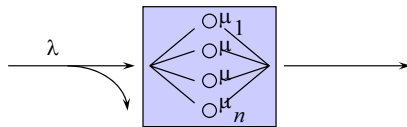
Ääretön järjestelmä

- Ääretön määrä palvelijoita ja palvelupaikkoja ($n = \infty$), ei yhtään odotuspaikkaa ($m = 0$)
 - Yhtäkään asiakasta ei menetetä, eikä kenenkään tarvitse edes odottaa palveluun pääsyä. Estoton järjestelmä.
 - Tällaisen (hypotettisen) järjestelmän analyysi on tyypillisesti huomattavasti helpompaa kuin vastaavan todellisen järjestelmän, jossa voi olla vain äärellinen määrä palvelijoita.
 - Joskus tämä on ainoa tapa saada edes approksimatiivista tietoa vastaavasta todellisesta järjestelmästä.



Puhdas menetysjärjestelmä

- Äärellinen määrä palvelijoita ($n < \infty$), palvelupaikkoja n , ei yhtään odotuspaikkaa ($m = 0$)
 - Jos asiakkaan saapuessa kaikki palvelijat ovat käytössä eli järjestelmä on ns. **estotilassa** (usein puhutaan myös **täydestä** järjestelmästä), kyseinen asiakas poistuu koko järjestelmästä pääsemättä palveluun ollenkaan. Järjestelmä on siis **estollinen** (häviöllinen) ja estyvä asiakas **menetetään**.
- Käyttäjän kokeman palvelun laadun kannalta kiinnostava suure on esim.
 - todennäköisyys, että järjestelmä on täysi asiakkaan saapuessa



5

Sisältö

- Kertausta: yksinkertainen liikenneteoreettinen malli
- Poisson-malli (asiakkaita ∞ , palvelijoita ∞)
- Sovellus virtaavan dataliikenteen mallintamiseen vuotasolla
- Erlang-malli (asiakkaita ∞ , palvelijoita $n < \infty$)
- Sovellus puhelinliikenteen mallintamiseen runkoverkossa
- Binomimalli (asiakkaita $k < \infty$, palvelijoita $n = k$)
- Engset-malli (asiakkaita $k < \infty$, palvelijoita $n < k$)
- Sovellus puhelinliikenteen mallintamiseen liityntäverkossa

6

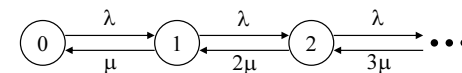
Poisson-malli (M/M/∞)

- **Määritelmä:** Poisson-malli on seuraavanlainen yksinkertainen liikenneteoreettinen malli:
 - ääretön määrä riippumattomia käyttäjiä ($k = \infty$)
 - saapumisten väliajat IID noudattaen $\text{Exp}(\lambda)$ -jakaumaa odotusarvolla $1/\lambda$
 - saapumisprosessi on siis Poisson-prosessi intensiteetillä λ
 - ääretön määrä palvelijoita ($n = \infty$)
 - palveluajat IID noudattaen $\text{Exp}(\mu)$ -jakaumaa odotusarvolla $1/\mu$
 - ei odotuspaikkoja ($m = 0$)
- **Huom.**
 - Kendallin merkinnöillä kyseessä on M/M/∞ -jonomalli
 - ääretön järjestelmä, siis **estoton**
- **Merkintä:**
 - $a = \lambda/\mu =$ liikenneintensiteetti

7

Tilasiirtymäkaavio

- Tark. järjestelmässä olevien asiakkaiden lkm:ää $X(t)$ ajan t funktiona
 - Oletetaan, että $X(t) = i$ jollakin hetkellä t
 - Lyhyellä aikavälillä $(t, t+h]$ voi tapahtua seuraavaa:
 - tn:llä $\lambda h + o(h)$ systeemiin saapuu uusi asiakas (aiheuttaen tilasiirtymän $i \rightarrow i + 1$)
 - jos $i > 0$, niin tn:llä $i\mu h + o(h)$ jonkun systeemissä olevan asiakkaan palvelu päättyy (aiheuttaen tilasiirtymän $i \rightarrow i - 1$)
- Prosessi $X(t)$ on selvästikin Markov-prosessi tilasiirtymäkaavionsa



- **Huom.** Prosessi $X(t)$ on pelkistymätön sk-prosessi äärettömällä tila-avaruudella $S = \{0, 1, 2, \dots\}$

8

Tasapainojakauma (1)

- Lähdetään liikkeelle lokaaleista tasapainoyhtälöistä:

$$\pi_i \lambda = \pi_{i+1} (i+1) \mu \quad (\text{LBE})$$

$$\Rightarrow \pi_{i+1} = \frac{\lambda}{(i+1)\mu} \pi_i = \frac{a}{i+1} \pi_i$$

$$\Rightarrow \pi_i = \frac{a^i}{i!} \pi_0, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

- Sovelletaan sitten jakaumaehtoa:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = \pi_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^i}{i!} = 1 \quad (\text{N})$$

$$\Rightarrow \pi_0 = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^i}{i!} \right)^{-1} = (e^a)^{-1} = e^{-a}$$

9

Tasapainojakauma (2)

- Tasapainotilanteessa systeemissä olevien asiakkaiden lkm X noudattaa siis **Poisson-jakaumaa**:

$$X \sim \text{Poisson}(a)$$

$$P\{X = i\} = \pi_i = \frac{a^i}{i!} e^{-a}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$$E[X] = a, \quad D^2[X] = a$$

- Huom.** Insensitiivisyys palveluajan jakauman suhteen:
 - Itse asiassa tulos pätee yleisemminkin: eksponentiaalisen palveluaika-jakauman sijasta voidaan palveluajalle valita mikä tahansa jakauma, jonka odotusarvo on $1/\mu$ (tätä sanotaan **insensitiivisyydeksi** palveluajan jakauman suhteen)
 - Voimme siis M/M/ ∞ -mallin sijasta tarkastella yleisempää M/G/ ∞ -mallia

10

Sisältö

- Kertausta: yksinkertainen liikenneteoreettinen malli
- Poisson-malli (asiakkaita ∞ , palvelijoita ∞)
- Sovellus virtaavan dataliikenteen mallintamiseen vuotasolla
- Erlang-malli (asiakkaita ∞ , palvelijoita $n < \infty$)
- Sovellus puhelinliikenteen mallintamiseen runkoverkossa
- Binomimalli (asiakkaita $k < \infty$, palvelijoita $n = k$)
- Engset-malli (asiakkaita $k < \infty$, palvelijoita $n < k$)
- Sovellus puhelinliikenteen mallintamiseen liityntäverkossa

11

Sovellus virtaavan dataliikenteen mallintamiseen vuotasolla

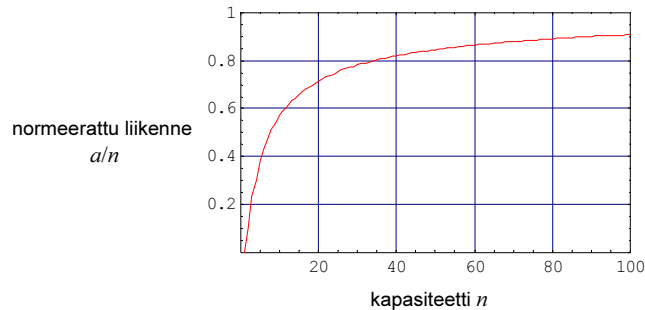
- Poisson-malli soveltuu virtaavan vakionopeuksisen dataliikenteen kuvaamiseen vuotasolla
 - asiakas = vakionopeuksinen UDP-vuoto
 - λ = uusien voiden saapumisintensiteetti (vuoto per aikayks.)
 - $h = 1/\mu$ = keskimääräinen vuon kesto (aikayks.)
 - $a = \lambda\mu$ = liikenneintensiteetti
 - r = yksittäisen vuon bittinopeus (datayks. per aikayks.)
 - N = aktiivisten voiden lukumäärä noudattaen Poisson(a)-jakaumaa
- Kun voiden yhteinen lähetyksenopeus Nr ylittää linkin nopeuden $C = nr$, bittejä katoaa
 - häviösuhte** p_{loss} kertoo kadonneen liikenteen osuuden koko liikenteestä:

$$p_{\text{loss}} = \frac{E[(Nr-C)^+]}{E[Nr]} = \frac{E[(N-n)^+]}{E[N]} = \frac{1}{a} \sum_{i=n+1}^{\infty} (i-n) \frac{a^i}{i!} e^{-a}$$

12

Multipleksoitumisetu

- Lasketaan tarjottu liikenne a siten että häviösuhte $p_{\text{loss}} < 1\%$
- Multipleksoitumisetua** kuvaa yhdelle kapasiteettiyksikölle tarjotun liikenteen määrä a/n kapasiteetin n funktiona



13

Sisältö

- Kertausta: yksinkertainen liikenneteoreettinen malli
- Poisson-malli (asiakkaita ∞ , palvelijoita ∞)
- Sovellus virtaavan dataliikenteen mallintamiseen vuotasolla
- Erlang-malli (asiakkaita ∞ , palvelijoita $n < \infty$)**
- Sovellus puhelinliikenteen mallintamiseen runkoverkossa
- Binomimalli (asiakkaita $k < \infty$, palvelijoita $n = k$)
- Engset-malli (asiakkaita $k < \infty$, palvelijoita $n < k$)
- Sovellus puhelinliikenteen mallintamiseen liityntäverkossa

14

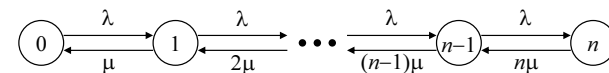
Erlang-malli (M/M/n/n)

- Määritelmä:** Erlang-malli on seuraavanlainen yksinkertainen liikenneteoreettinen malli:
 - äätön määrä riippumattomia käyttäjiä ($k = \infty$)
 - saapumisten väliajat IID noudattaen $\text{Exp}(\lambda)$ -jakaumaa odotusarvolla $1/\lambda$
 - saapumisprosessi on siis Poisson-prosessi intensiteetillä λ
 - äärellinen määrä palvelijoita ($n < \infty$)
 - palveluajat IID noudattaen $\text{Exp}(\mu)$ -jakaumaa odotusarvolla $1/\mu$
 - ei odotuspaikkoja ($m = 0$)
- Huom.**
 - Kendallin merkinnöillä kyseessä on M/M/n/n -jonomalli
 - puhdas estojärjestelmä, siis **estollinen**
- Merkintä:**
 - $a = \lambda/\mu =$ liikenneintensiteetti

15

Tilasiirtymäkaavio

- Tark. järjestelmässä olevien asiakkaiden lkm:ää $X(t)$ ajan t funktiona
 - Oletetaan, että $X(t) = i$ jollakin hetkellä t
 - Lyhyellä aikavälillä $(t, t+h]$ voi tapahtua seuraavaa:
 - jos $i < n$, niin tn:llä $\lambda h + o(h)$ systeemiin saapuu uusi asiakas (aiheuttaen tilasiirtymän $i \rightarrow i + 1$)
 - jos $i > 0$, niin tn:llä $i\mu h + o(h)$ jonkun systeemissä olevan asiakkaan palvelu päättyy (aiheuttaen tilasiirtymän $i \rightarrow i - 1$)
- Prosessi $X(t)$ on selvästikin Markov-prosessi tilasiirtymäkaavionsaan



- Huom.** Prosessi $X(t)$ on pelkistymätön sk-prosessi äärellisellä tila-avaruudella $S = \{0, 1, 2, \dots, n\}$

16

Tasapainojakauma (1)

- Lähdetään jälleen liikkeelle lokaaleista tasapainoyhtälöistä:

$$\pi_i \lambda = \pi_{i+1} (i+1) \mu \quad (\text{LBE})$$

$$\Rightarrow \pi_{i+1} = \frac{\lambda}{(i+1)\mu} \pi_i = \frac{a}{i+1} \pi_i$$

$$\Rightarrow \pi_i = \frac{a^i}{i!} \pi_0, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

- Sovelletaan sitten jakaumaehto:

$$\sum_{i=0}^n \pi_i = \pi_0 \sum_{i=0}^n \frac{a^i}{i!} = 1 \quad (\text{N})$$

$$\Rightarrow \pi_0 = \left(\sum_{i=0}^n \frac{a^i}{i!} \right)^{-1}$$

17

Tasapainojakauma (2)

- Tasapainotilanteessa systeemissä olevien asiakkaiden lkm X noudattaa siis ns. **katkaistua Poisson-jakaumaa**:

$$P\{X = i\} = \pi_i = \frac{a^i}{i!} \pi_0, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$\sum_{j=0}^n \frac{a^j}{j!}$$

- Huom.** Insensitiivisyys palveluajan jakauman suhteen:

- Tulos pätee jälleen yleisemminkin: eksponentiaalisen palveluaika-jakauman sijasta voidaan palveluajalle valita mikä tahansa jakauma, jonka odotusarvo on $1/\mu$
- Voimme siis M/M/n/n -mallin sijasta tarkastella yleisempää M/G/n/n -mallia

18

Aikaesto

- Aikaesto** B_t = se osuus ajasta, jolloin systeemi on täysi = tn , että systeemi on mielivaltaisena ajanhetkenä täysi eli tilassa $n = \pi_n$:

$$B_t := P\{X = n\} = \pi_n = \frac{a^n}{n!} \pi_0 = \frac{a^n}{\sum_{j=0}^n \frac{a^j}{j!}}$$

19

Kutsuesto

- Kutsuesto** B_c = niiden saapuvien kutsujen osuus, jotka menetetään = tn , että saapuva asiakas menetetään = tn , että asiakkaan saapuessa systeemi on täysi eli tilassa n
- Poisson-prosessin PASTA-ominaisuuden mukaan: saapuva asiakas näkee systeemin tasapainossa. Tästä päätelemme, että kutsuesto on Erlang-mallissa täsmälleen sama kuin aikaestokin:

$$B_c = B_t = \frac{a^n}{\sum_{j=0}^n \frac{a^j}{j!}}$$

- Kuten aiemmin on jo todettu, tämä on ns. **Erlangin (esto)kaava**

20

Sisältö

- Kertausta: yksinkertainen liikenneteoreettinen malli
- Poisson-malli (asiakkaita ∞ , palvelijoita ∞)
- Sovellus virtaavan dataliikenteen mallintamiseen vuotasolla
- Erlang-malli (asiakkaita ∞ , palvelijoita $n < \infty$)
- **Sovellus puhelinliikenteen mallintamiseen runkoverkossa**
- Binomimalli (asiakkaita $k < \infty$, palvelijoita $n = k$)
- Engset-malli (asiakkaita $k < \infty$, palvelijoita $n < k$)
- Sovellus puhelinliikenteen mallintamiseen liityntäverkossa

21

Sovellus puhelinliikenteen mallintamiseen runkoverkossa

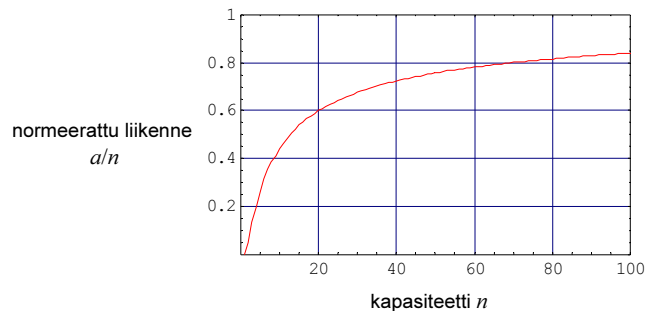
- Erlang-malli soveltuu puhelinliikenteen kuvaamiseen runkoverkossa, jossa yhtä linkkiä kuormittavien käyttäjien lukumäärä on hyvin suuri
 - asiakas = puhelu = kutsu
 - λ = uusien kutsujen saapumisintensiteetti (kutsua per aikayks.)
 - $h = 1/\mu$ = keskimääräinen kutsun kesto eli pitoaika (aikayks.)
 - $a = \lambda\mu$ = liikenneintensiteetti
 - n = linkin kapasiteetti
- Kun uuden kutsun saapuessa koko linkin kapasiteetti n on käytössä, kutsu estyy
 - **kutsuesto** B_c kertoo tämän tapahtuman todennäköisyyden

$$B_c = \frac{\frac{a^n}{n!}}{\sum_{j=0}^n \frac{a^j}{j!}}$$

22

Multipleksoitumisetu

- Lasketaan tarjottu liikenne a siten että kutsuesto $B_c < 1\%$
- **Multipleksoitumisetua** kuvaa yhdelle kapasiteettiyksikölle tarjotun liikenteen määrä a/n kapasiteetin n funktiona



23

Sisältö

- Kertausta: yksinkertainen liikenneteoreettinen malli
- Poisson-malli (asiakkaita ∞ , palvelijoita ∞)
- Sovellus virtaavan dataliikenteen mallintamiseen vuotasolla
- Erlang-malli (asiakkaita ∞ , palvelijoita $n < \infty$)
- Sovellus puhelinliikenteen mallintamiseen runkoverkossa
- **Binomimalli (asiakkaita $k < \infty$, palvelijoita $n = k$)**
- Engset-malli (asiakkaita $k < \infty$, palvelijoita $n < k$)
- Sovellus puhelinliikenteen mallintamiseen liityntäverkossa

24

Binomimalli (M/M/k/k/k)

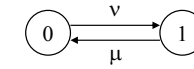
- **Määr. Binomimalli** on seuraavanlainen yksinkert. liikenneteor. malli:
 - äärellinen määrä riippumattomia asiakkaita ($k < \infty$)
 - asiakkaat **on-off-tyyppisiä** (siis välillä 'joutilaita' ja välillä 'palvelussa')
 - joutenoloajat IID noudattaen $\text{Exp}(v)$ -jakaumaa odotusarvolla $1/v$
 - jokaiselle asiakalle oma palvelija ($n = k$)
 - palveluajat IID noudattaen $\text{Exp}(\mu)$ -jakaumaa odotusarvolla $1/\mu$
 - ei odotuspaikkoja ($m = 0$)
- **Huom.**
 - Kendallin merkinnöillä: M/M/k/k/k -jonomalli
 - ko. systeemi on **estoton** (vaikkakin äärellinen)
- On-off tyyppinen asiakas:



25

On-off-tyyppinen asiakas (1)

- Merk. $X_j(t)$:llä asiakkaan j ($j = 1, 2, \dots, k$) tilaa hetkellä t
 - Indeksointi: tila 0 = 'joutilaita', tila 1 = 'palvelussa'
 - Lyhyellä aikavälillä $(t, t+h]$ voi tapahtua seuraavaa:
 - jos $X_j(t) = 0$, niin tn:llä $vh + o(h)$ asiakas siirtyy palveluun (aiheuttaen tilasiirtymän $0 \rightarrow 1$)
 - jos $X_j(t) = 1$, niin tn:llä $\mu h + o(h)$ asiakkaan palvelu päättyy (aiheuttaen tilasiirtymän $1 \rightarrow 0$)
- Prosessi $X_j(t)$ on selvästikin Markov-prosessi tilasiirtymäkaavionaan



- **Huom.** Prosessi $X(t)$ on pelkistymätön sk-prosessi äärellisellä tila-avaruudella $S = \{0, 1\}$

26

On-off-tyyppinen asiakas (2)

- Prosessin $X_j(t)$ tasapainojakauman laskemiseksi lähdetään liikkeelle lokaalista tasapainoyhtälöstä:

$$\pi_0^{(j)} v = \pi_1^{(j)} \mu \Rightarrow \pi_1^{(j)} = \frac{v}{\mu} \pi_0^{(j)}$$

- Jakaumaehdon mukaan:

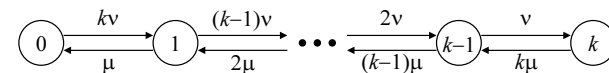
$$\pi_0^{(j)} + \pi_1^{(j)} = \pi_0^{(j)} \left(1 + \frac{v}{\mu}\right) = 1 \Rightarrow \pi_0^{(j)} = \frac{\mu}{v + \mu}, \quad \pi_1^{(j)} = \frac{v}{v + \mu}$$

- Tasapainotilanteessa yksittäisen asiakkaan tila X_j noudattaa siis **Bernoulli-jakaumaa** onnistumistodennäköisyydellä $v/(v+\mu)$
 - tarjottu liikenne on tässä tapauksessa $v/(v+\mu)$
- Tästä voitaisiin suoraan päätellä (koska asiakkaat oletettu toisistaan riippumattomiksi), että koko systeemin tilan X (so. systeemissä olevien asiakkaiden lkm:n) tasapainojakauma on $\text{Bin}(k, v/(v+\mu))$ -jakauma

27

Tilasiirtymäkaavio

- Tark. järjestelmässä olevien asiakkaiden lkm:ää $X(t)$ ajan t funktiona
 - Oletetaan, että $X(t) = i$ jollakin hetkellä t
 - Lyhyellä aikavälillä $(t, t+h]$ voi tapahtua seuraavaa:
 - jos $i < k$, niin tn:llä $(k - i)v h + o(h)$ joku joutilaita olevista asiakkaista siirtyy palveluun (aiheuttaen tilasiirtymän $i \rightarrow i + 1$)
 - jos $i > 0$, niin tn:llä $i\mu h + o(h)$ jonkun systeemissä olevan asiakkaan palvelu päättyy (aiheuttaen tilasiirtymän $i \rightarrow i - 1$)
- Prosessi $X(t)$ on selvästikin Markov-prosessi tilasiirtymäkaavionaan



- **Huom.** Prosessi $X(t)$ on pelkistymätön sk-prosessi äärellisellä tila-avaruudella $S = \{0, 1, \dots, k\}$

28

Tasapainojakauma (1)

- Lähdetään jälleen liikkeelle lokaaleista tasapainoyhtälöistä:

$$\pi_i(k-i)v = \pi_{i+1}(i+1)\mu \quad (\text{LBE})$$

$$\Rightarrow \pi_{i+1} = \frac{(k-i)v}{(i+1)\mu} \pi_i$$

$$\Rightarrow \pi_i = \frac{k!}{i!(k-i)!} \left(\frac{v}{\mu}\right)^i \pi_0 = \binom{k}{i} \left(\frac{v}{\mu}\right)^i \pi_0, \quad i = 0, 1, \dots, k$$

- Sovelletaan sitten jakaumaehtoa:

$$\sum_{i=0}^k \pi_i = \pi_0 \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \left(\frac{v}{\mu}\right)^i = 1 \quad (\text{N})$$

$$\Rightarrow \pi_0 = \left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \left(\frac{v}{\mu}\right)^i \right)^{-1} = \left(1 + \frac{v}{\mu}\right)^{-k} = \left(\frac{\mu}{v+\mu}\right)^k \quad 29$$

Tasapainojakauma (2)

- Tasapainotilanteessa systeemissä olevien asiakkaiden lkm X noudattaa siis **binomijakaumaa**:

$$X \sim \text{Bin}\left(k, \frac{v}{v+\mu}\right)$$

$$P\{X = i\} = \pi_i = \binom{k}{i} \left(\frac{v}{v+\mu}\right)^i \left(\frac{\mu}{v+\mu}\right)^{k-i}, \quad i = 0, 1, \dots, k$$

$$E[X] = \frac{kv}{v+\mu}, \quad D^2[X] = k \cdot \frac{v}{v+\mu} \cdot \frac{\mu}{v+\mu} = \frac{kv\mu}{(v+\mu)^2}$$

- Huom.** Insensiitiivisyys palveluajan ja joutenoloajan jakauman suhteen:
 - Tässä tapauksessa tulos on insensiitivi **sekä** palveluajan **että** joutenoloajan jakauman suhteen
 - Voimme siis M/M/k/k/k -mallin sijasta tarkastella yleisempää G/G/k/k/k -mallia

30

Sisältö

- Kertausta: yksinkertainen liikenneteoreettinen malli
- Poisson-malli (asiakkaita ∞ , palvelijoita ∞)
- Sovellus virtaavan dataliikenteen mallintamiseen vuotasolla
- Erlang-malli (asiakkaita ∞ , palvelijoita $n < \infty$)
- Sovellus puhelinliikenteen mallintamiseen runkoverkossa
- Binomimalli (asiakkaita $k < \infty$, palvelijoita $n = k$)
- Engset-malli (asiakkaita $k < \infty$, palvelijoita $n < k$)
- Sovellus puhelinliikenteen mallintamiseen liityntäverkossa

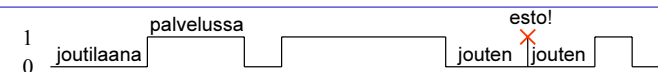
31

Engset-malli (M/M/n/n/k)

- Engset-malli** on seuraavanlainen yksinkertainen liikenneteor. malli:
 - äärellinen** määrä riippumattomia asiakkaita ($k < \infty$)
 - asiakkaat **on-off-tyyppisiä** (siis välillä 'joutilaista' ja välillä 'palvelussa')
 - joutenoloajat IID noudattaen $\text{Exp}(v)$ -jakaumaa odotusarvolla $1/v$
 - vähemmän palvelijoita** kuin asiakkaita ($n < k$)
 - palveluajat IID noudattaen $\text{Exp}(\mu)$ -jakaumaa odotusarvolla $1/\mu$
 - ei odotuspaikkoja ($m = 0$)

- Huom.**
 - Kendallin merkinnöillä: M/M/n/n/k -jonomalli
 - ko. systeemi on **estollinen**
- On-off tyyppinen asiakas:

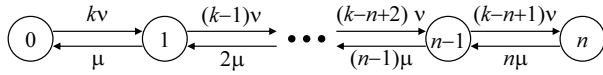
Oletus: Estotilanteessa (so. systeemin ollessa täysi asiakkaan halutessa palveluun) ko. asiakas aloittaa uuden joutenolojakson.



32

Tilasiirtymäkaavio

- Tark. järjestelmässä olevien asiakkaiden lkm:ää $X(t)$ ajan t funktiona
 - Oletetaan, että $X(t) = i$ jollakin hetkellä t
 - Lyhyellä aikavälillä $(t, t+h]$ voi tapahtua seuraavaa:
 - jos $i < n$, niin tn:llä $(k-i)v + o(h)$ joku joutilaina olevista asiakkaista siirtyy palveluun (aiheuttaen tilasiirtymän $i \rightarrow i+1$)
 - jos $i > 0$, niin tn:llä $i\mu h + o(h)$ jonkun systeemissä olevan asiakkaan palvelu päättyy (aiheuttaen tilasiirtymän $i \rightarrow i-1$)
- Prosessi $X(t)$ on selvästikin Markov-prosessi tilasiirtymäkaavionaan



- Huom.** Prosessi $X(t)$ on pelkistymätön sk-prosessi äärellisellä tila-avaruudella $S = \{0, 1, \dots, n\}$

33

Tasapainojakauma (1)

- Lähdetään jälleen liikkeelle lokaaleista tasapainoyhtälöistä:

$$\pi_i(k-i)v = \pi_{i+1}(i+1)\mu \quad (\text{LBE})$$

$$\Rightarrow \pi_{i+1} = \frac{(k-i)v}{(i+1)\mu} \pi_i$$

$$\Rightarrow \pi_i = \frac{k!}{i!(k-i)!} \left(\frac{v}{\mu}\right)^i \pi_0 = \binom{k}{i} \left(\frac{v}{\mu}\right)^i \pi_0, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

- Sovelletaan sitten jakaumaehtoa:

$$\sum_{i=0}^n \pi_i = \pi_0 \sum_{i=0}^n \binom{k}{i} \left(\frac{v}{\mu}\right)^i = 1 \quad (\text{N})$$

$$\Rightarrow \pi_0 = \left(\sum_{i=0}^n \binom{k}{i} \left(\frac{v}{\mu}\right)^i \right)^{-1}$$

34

Tasapainojakauma (2)

- Tasapainotilanteessa systeemissä olevien asiakkaiden lkm X noudattaa siis ns. **katkaistua binomijakaumaa**:

$$P\{X = i\} = \pi_i = \frac{\binom{k}{i} \left(\frac{v}{\mu}\right)^i}{\sum_{j=0}^n \binom{k}{j} \left(\frac{v}{\mu}\right)^j} = \frac{\binom{k}{i} \left(\frac{v}{v+\mu}\right)^i \left(\frac{\mu}{v+\mu}\right)^{k-i}}{\sum_{j=0}^n \binom{k}{j} \left(\frac{v}{v+\mu}\right)^j \left(\frac{\mu}{v+\mu}\right)^{k-j}}, \quad i = 0, \dots, n$$

- Tarjottu liikenne on tässä tapauksessa $kv/(v+\mu)$
- Huom.** Insensitiivisyys palveluajan ja joutenoloajan jakauman suhteen:
 - Tässäkin tapauksessa tulos on insensitiivi **sekä** palveluajan **että** joutenoloajan jakauman suhteen
 - Voimme siis M/M/n/n/k -mallin sijasta tarkastella yleisempää G/G/n/n/k -mallia

35

Aikaesto

- Aikaesto** B_t = se osuus ajasta, jolloin systeemi on täysi = tn, että systeemi on mielivaltaisena ajanhetkenä täysi eli tilassa $n = \pi_n$:

$$B_t := P\{X = n\} = \pi_n = \frac{\binom{k}{n} \left(\frac{v}{\mu}\right)^n}{\sum_{j=0}^n \binom{k}{j} \left(\frac{v}{\mu}\right)^j}$$

36

Kutsuesto (1)

- **Kutsuesto** B_c = niiden saapuvien kutsujen osuus, jotka menetetään = tn , että saapuva asiakas menetetään = tn , että asiakkaan saapuessa systeemi on täysi eli tilassa n
 - Koska Engset-mallissa saapumisprosessi ei ole Poisson-prosessi (miksei?), myöskään PASTA-ominaisuutta ei voida hyödyntää kutsuestoa laskettaessa
 - Kuten tullaan seuraavista kalvoista näkemään, Engset-mallissa tosiaan käy niin, että saapuvan asiakkaan näkemä tilajakauma poikkeaa edellä johdetusta tasapainojakaumasta (so. prosessin $X(t)$ stationaarisesta jakaumasta)
 - Tästä taas seuraa, että Engset-mallissa kutsu- ja aikaesto poikkeavat toisistaan

37

Kutsuesto (2)

- Merk. π_i^* :llä tn :ttä, että saapuva asiakas näkee systeemin tilassa i
- Tarkastellaan pitkää ajanjaksoa $(0, T)$:
 - Tästä ajasta systeemi viettää keskimäärin ajan $\pi_i T$ tilassa i , minä aikana saapuu keskimäärin $(k-i)v \cdot \pi_i T$ asiakasta (jotka siis kaikki näkevät systeemin tilassa i)
 - Kaiken kaikkiaan aikavälillä $(0, T)$ saapuu keskimäärin $\sum_j (k-j)v \cdot \pi_j T$ asiakasta
- Näin ollen

$$\pi_i^* = \frac{(k-i)v \cdot \pi_i T}{\sum_{j=0}^n (k-j)v \cdot \pi_j T} = \frac{(k-i) \cdot \pi_i}{\sum_{j=0}^n (k-j) \cdot \pi_j}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

38

Kutsuesto (3)

- Voidaan osoittaa (osoita!) että

$$\pi_i^* = \frac{\binom{k-1}{i} \left(\frac{v}{\mu}\right)^i}{\sum_{j=0}^n \binom{k-1}{j} \left(\frac{v}{\mu}\right)^j}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

- Kun riippuvuus asiakkaiden lkm:stä k merkitään eksplisiittisesti näkyviin, saamme seuraavan tuloksen:

$$\pi_i^*(k) = \pi_i(k-1), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

- Toisin sanoen "saapuva asiakas näkee sellaisen systeemin tasapainossa, jossa on yksi asiakas vähemmän (hän itse!)"

39

Kutsuesto (4)

- Valitsemalla $i = n$ saamme kutsuestolle kaavan

$$B_c(k) = \pi_n^*(k) = \pi_n(k-1) = B_t(k-1)$$

- Engset-mallissa siis kutsuesto k :n asiakkaan systeemissä on sama kuin aikaesto $k-1$:n asiakkaan systeemissä:

$$B_c(k) = B_t(k-1) = \frac{\binom{k-1}{n} \left(\frac{v}{\mu}\right)^n}{\sum_{j=0}^n \binom{k-1}{j} \left(\frac{v}{\mu}\right)^j}$$

- Tämä on **Engsetin (esto)kaava**

40

Sisältö

- Kertausta: yksinkertainen liikenneteoreettinen malli
- Poisson-malli (asiakkaita ∞ , palvelijoita ∞)
- Sovellus virtaavan dataliikenteen mallintamiseen vuotasolla
- Erlang-malli (asiakkaita ∞ , palvelijoita $n < \infty$)
- Sovellus puhelinliikenteen mallintamiseen runkoverkossa
- Binomimalli (asiakkaita $k < \infty$, palvelijoita $n = k$)
- Engset-malli (asiakkaita $k < \infty$, palvelijoita $n < k$)
- Sovellus puhelinliikenteen mallintamiseen liityntäverkossa

41

Sovellus puhelinliikenteen mallintamiseen liityntäverkossa

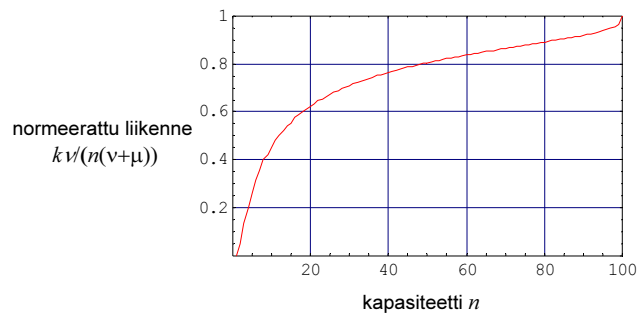
- Engset-malli soveltuu puhelinliikenteen kuvaamiseen liityntäverkossa, jossa yhtä linkkiä kuormittavien käyttäjien lukumäärä on kohtalainen
 - asiakas = puhelu = kutsu
 - v = uusien kutsujen saapumisintensiteetti per joutilas käyttäjä
 - $1/\mu$ = keskimääräinen kutsun kesto eli pitoaika (aikayks.)
 - k = käyttäjien lukumäärä
 - n = linkin kapasiteetti
- Kun uuden kutsun saapuessa koko linkin kapasiteetti n on käytössä, kutsu estyy
 - **kutsuesto** B_c kertoo tämän tapahtuman todennäköisyyden

$$B_c = \frac{\binom{k-1}{n} \left(\frac{v}{\mu}\right)^n}{\sum_{j=0}^n \binom{k-1}{j} \left(\frac{v}{\mu}\right)^j}$$

42

Multipleksoitumisetu

- Oletetaan, että liityntälinkkiä kuormittaa $k = 100$ käyttäjää
- Lasketaan tarjottu liikenne $kv/(v+\mu)$ siten että kutsuesto $B_c < 1\%$
- **Multipleksoitumisetua** kuvaa yhdelle kapasiteettiyksikölle tarjotun liikenteen määrä $kv/(n(v+\mu))$ kapasiteetin n funktiona



43