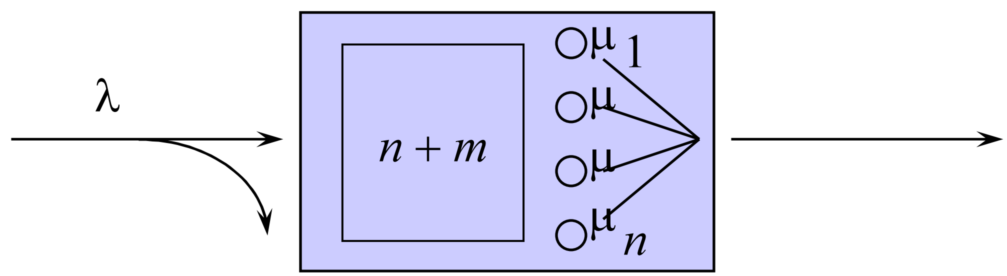
9. Jakojärjestelmät

Sisältö

- Kertausta: yksinkertainen liikenneteoreettinen malli
- M/M/1-PS (∞ asiakasta, 1 palvelija, ∞ asiakaspaikkaa)
- M/M/n-PS (∞ asiakasta, n palvelijaa, ∞ asiakaspaikkaa)
- Sovellus elastisen dataliikenteen mallintamiseen vuotasolla
- M/M/1/k/k-PS (k asiakasta, 1 palvelija, k asiakaspaikkaa)

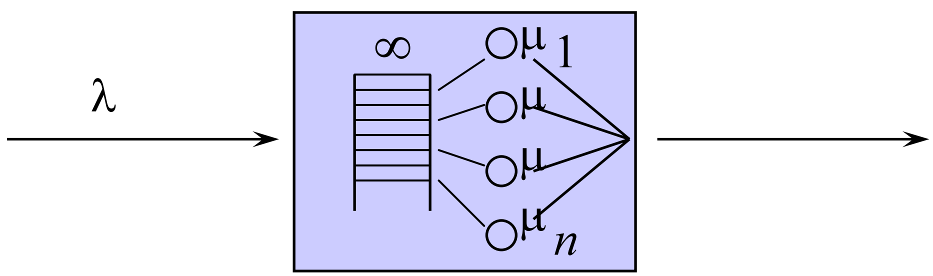
Yksinkertainen liikenneteoreettinen malli

- **Asiakkaita saapuu** keskimäärin nopeudella λ (asiakasta per aikayks.)
  - $1/\lambda$ = keskimääräinen asiakkaiden väliaika
- **Asiakkaita palvellaan** n:llä rinnakkaisella **palvelijalla**
- Kukin palvelija palvelee keskim. nopeudella μ (asiakasta per aikayks.)
  - $1/\mu$ = keskimääräinen asiakkaan palveluaika
- Järjestelmässä on $n + m$ **asiakaspaikkaa**
  - vähintään n **palvelupaikkaa** ja korkeintaan m **odotuspaikkaa**
- Estyvät asiakkaat (joiden saapuessa järjestelmä on **täysi**) menetetään



Puhdas jakojärjestelmä

- Äärellinen määrä palvelijoita ($n < \infty$), ääretön määrä palvelupaikkoja ($n + m = \infty$), ei odotuspaikkoja, PS-jonokuri
  - Jos systeemissä on korkeintaan n asiakasta ($x \le n$), jokaisella asiakkaalla on oma palvelijansa. Jos asiakkaita taas on enemmän ($x > n$), niin kokonaispalvelu ($n\mu$) jaetaan tasan kaikkien asiakkaiden kesken.
  - Asiakkaan saama palveluintensiteetti on siten $\min\{\mu, n\mu/x\}$
  - Yhtäkään asiakasta ei menetetä, eikä kenenkään tarvitse edes odottaa palveluun pääsyä. Siis estoton järjestelmä.
  - Toisaalta asiakkaiden palvelu viivästyy sitä enemmän mitä enemmän systeemissä on asiakkaita. Viive siis kiinnostava suure.



Sisältö

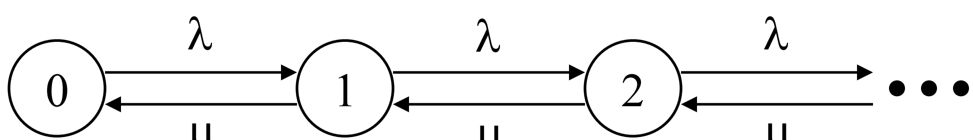
- Kertausta: yksinkertainen liikenneteoreettinen malli
- M/M/1-PS (∞ asiakasta, 1 palvelija, ∞ asiakaspaikkaa)
- M/M/n-PS (∞ asiakasta, n palvelijaa, ∞ asiakaspaikkaa)
- Sovellus elastisen dataliikenteen mallintamiseen vuotasolla
- M/M/1/k/k-PS (k asiakasta, 1 palvelija, k asiakaspaikkaa)

M/M/1-PS jono

- Tarkastellaan seuraavanlaista yksinkertaista liikenneteoreettista mallia:
  - ääretön määrä riippumattomia käyttäjiä ($k = \infty$)
  - saapumisten väliajat IID noudattaen $\mathrm{Exp}(\lambda)$-jakaumaa odotusarvonaan $1/\lambda$
    - saapumisprosessi on siis Poisson-prosessi intensiteettinään λ
  - yksi palvelija ($n = 1$)
  - palveluvaatimukset IID noudattaen $\mathrm{Exp}(\mu)$-jakaumaa odotusarvonaan $1/\mu$
  - ääretön määrä asiakaspaikkoja ($p = \infty$)
  - jonokuri: **PS.** Kaikkia systeemissä olevia asiakkaita siis palvellaan yhtaikaa tasapuolisesti niin, että palvelukapasiteetti μ jaetaan tasan kaikkien asiakkaiden kesken.
- **Huom**.
  - Kendallin merkinnöillä kyseessä on **M/M/1-PS** jonomalli
- Merkintä:
  - $\rho = \lambda/\mu$ = (liikenne)kuorma

Tilasiirtymäkaavio

- Tark. järjestelmässä olevien asiakkaiden lkm:ää $X(t)$ ajan t funktiona
  - Oletetaan, että $X(t) = i$ jollakin hetkellä t
  - Lyhyellä aikavälillä $(t, t+h]$ voi tapahtua seuraavaa:
    - tn:llä $\lambda h + o(h)$ systeemiin saapuu uusi asiakas (aiheuttaen tilasiirtymän $i \to i + 1$)
    - jos $i > 0$, niin tn:llä $i(\mu/i)h + o(h) = \mu h + o(h)$ jonkun palvelussa olevan asiakkaan palvelu päättyy (aiheuttaen tilasiirtymän $i \to i - 1$)
- Prosessi $X(t)$ on selvästikin Markov-prosessi tilasiirtymäkaavionaan



- **Huom**. Kyseessä on siis täsmälleen sama pelkistymätön sk-prosessi äärettömällä tila-avaruudella $S = \{0,1,2,...\}$ kuin M/M/1-FIFO jonolla

Tasapainojakauma (1)

- Lähdetään liikkeelle lokaaleista tasapainoyhtälöistä:

$$\pi_i \lambda = \pi_{i+1} \mu \qquad \text{(LBE)}$$

$$\Rightarrow \quad \pi_{i+1} = \frac{\lambda}{\mu} \pi_i = \rho \pi_i$$

$$\Rightarrow \quad \pi_i = \rho^i \pi_0, \quad i = 0,1,2,\ldots$$

- Sovelletaan sitten jakaumaehtoa:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = \pi_0 \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i = 1 \qquad \text{(N)}$$

$$\Rightarrow \quad \pi_0 = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \right)^{-1} = \left(\frac{1}{1-\rho} \right)^{-1} = 1 - \rho, \quad \text{jos } \rho < 1$$

Tasapainojakauma (2)

- Stabiilille systeemille (siis kun $\rho < 1$) systeemissä olevien asiakkaiden lkm X noudattaa tasapainotilanteessa siis **geometristä jakaumaa**:

$$\rho < 1 \;\Rightarrow\; X \sim \mathrm{Geom}(\rho)$$

$$P\{X = i\} = \pi_i = (1-\rho)\rho^i, \quad i = 0,1,2,\ldots$$

$$E[X] = \frac{\rho}{1-\rho}, \quad D^2[X] = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

- **Huom**. Insensitiivisyys palveluajan jakauman suhteen
  - Itse asiassa PS-jonokurin tapauksessa tulos pätee yleisemminkin: eksponentiaalisen palveluaika-jakauman sijasta voidaan palveluajalle valita mikä tahansa jakauma, jonka odotusarvo on $1/\mu$
  - Voimme siis M/M/1-PS mallin sijasta tarkastella yleisempää M/G/1-PS mallia

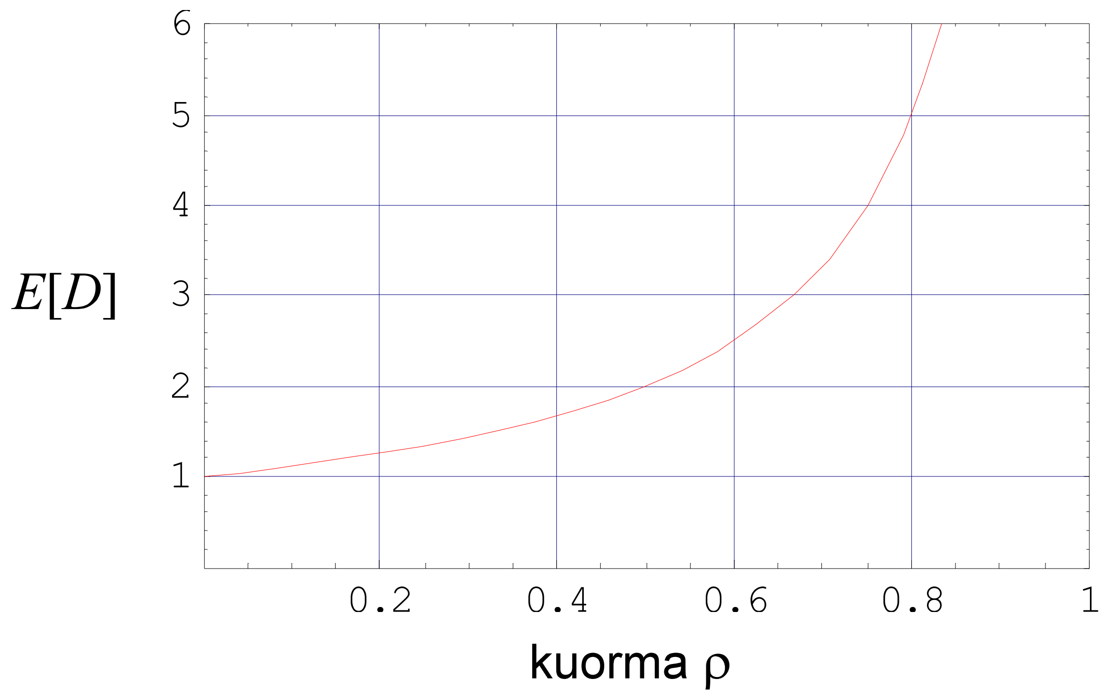
Keskimääräinen viive

- Merkitään D:llä asiakkaan koko systeemissäoloaikaa eli viivettä
- Koska keskimääräinen systeemissäolevien lukumäärä $E[X]$ on sama kaikille työnsäilyttäville jonokureille, sama pätee Littlen kaavan nojalla myös keskimääräiselle viiveelle $E[D]$.
- Voidaan siis käyttää FIFO-jonokurille luennolla 8 johdettua tulosta:

$$E[D] = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1-\rho}$$

Keskimääräinen viive $E[D]$ kuorman ρ funktiona

– Huom. Viiveen yksikkönä käytetty keskimääräistä palveluvaatimusta $E[S]$

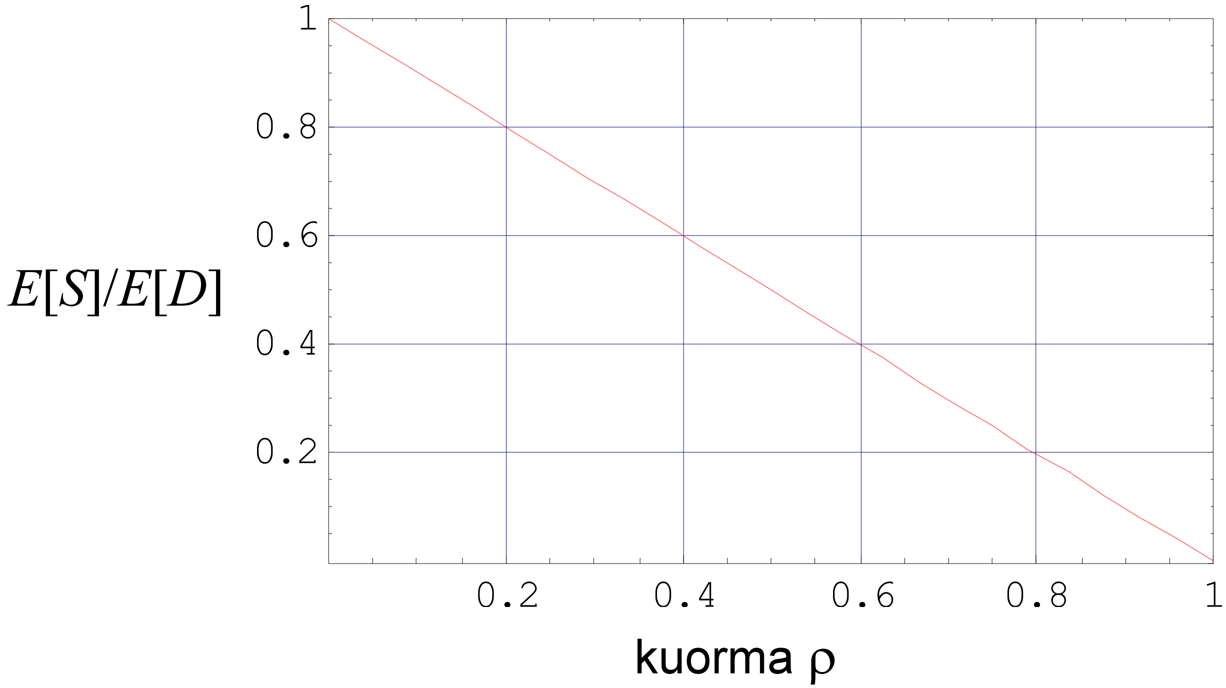


Suhteellinen läpäisynopeus

- Asiakkaan kokemaa palvelun laatua kuvaa suhteellinen läpäisynopeus $E[S]/E[D]$:

$$\frac{E[S]}{E[D]} = \frac{1}{\mu} \cdot \mu(1-\rho) = 1-\rho$$

Suhteellinen läpäisynopeus $E[S]/E[D]$ kuorman ρ funktiona



Sisältö

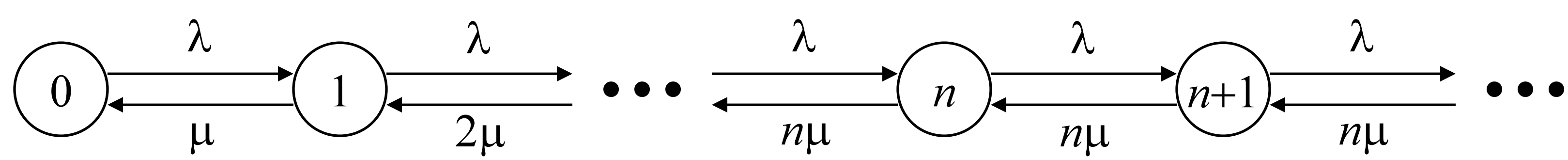
- Kertausta: yksinkertainen liikenneteoreettinen malli
- M/M/1-PS (∞ asiakasta, 1 palvelija, ∞ asiakaspaikkaa)
- M/M/n-PS (∞ asiakasta, n palvelijaa, ∞ asiakaspaikkaa)
- Sovellus elastisen dataliikenteen mallintamiseen vuotasolla
- M/M/1/k/k-PS (k asiakasta, 1 palvelija, k asiakaspaikkaa)

M/M/n-PS jono

- Tarkastellaan seuraavanlaista yksinkertaista liikenneteoreettista mallia:
  - ääretön määrä riippumattomia käyttäjiä ($k = \infty$)
  - saapumisten väliajat IID noudattaen $\mathrm{Exp}(\lambda)$-jakaumaa odotusarvonaan $1/\lambda$
    - saapumisprosessi on siis Poisson-prosessi intensiteettinään λ
  - äärellinen määrä palvelijoita ($n < \infty$)
  - palveluvaatimukset IID noudattaen $\mathrm{Exp}(\mu)$-jakaumaa odotusarvonaan $1/\mu$
  - ääretön määrä asiakaspaikkoja ($p = \infty$)
  - jonokuri: **PS**. Jos systeemissä on korkeintaan n asiakasta ($i \le n$), jokaisella asiakkaalla on oma palvelijansa. Jos asiakkaita taas on enemmän ($i > n$), niin kokonaispalvelu ($n\mu$) jaetaan tasan kaikkien asiakkaiden kesken.
- **Huom**.
  - Kendallin merkinnöillä kyseessä on **M/M/*n*-PS** jonomalli
- Merkintä:
  - $\rho = \lambda/(n\mu)$ = (liikenne)kuorma (palvelijaa kohti)

Tilasiirtymäkaavio

- Tark. järjestelmässä olevien asiakkaiden lkm:ää $X(t)$ ajan t funktiona
  - Oletetaan, että $X(t) = i$ jollakin hetkellä t
  - Lyhyellä aikavälillä $(t, t+h]$ voi tapahtua seuraavaa:
    - tn:llä $\lambda h + o(h)$ systeemiin saapuu uusi asiakas (aiheuttaen tilasiirtymän $i \to i + 1$)
    - jos $i > 0$, niin tn:llä $i{\cdot}\min\{\mu,n\mu/i\}{\cdot}h + o(h) = \min\{i,n\}{\cdot}\mu h + o(h)$ jonkun palvelussa olevan asiakkaan palvelu päättyy (aiheuttaen tilasiirtymän $i \to i - 1$)
- Prosessi $X(t)$ on selvästikin Markov-prosessi tilasiirtymäkaavionaan



- **Huom**. Kyseessä on siis täsmälleen sama pelkistymätön sk-prosessi äärettömällä tila-avaruudella $S = \{0,1,2,...\}$ kuin M/M/n-FIFO-jonolla

Tasapainojakauma (1)

- Lokaalit tasapainoyhtälöt tapauksessa $i < n$:

$$\pi_i \lambda = \pi_{i+1}(i+1)\mu \qquad \text{(LBE)}$$

$$\Rightarrow \quad \pi_{i+1} = \frac{\lambda}{(i+1)\mu}\pi_i = \frac{n\rho}{i+1}\pi_i$$

$$\Rightarrow \quad \pi_i = \frac{(n\rho)^i}{i!}\pi_0, \quad i = 0,1,\ldots,n$$

- Lokaalit tasapainoyhtälöt tapauksessa $i \geq n$:

$$\pi_i \lambda = \pi_{i+1} n\mu \qquad \text{(LBE)}$$

$$\Rightarrow \quad \pi_{i+1} = \frac{\lambda}{n\mu}\pi_i = \rho\pi_i$$

$$\Rightarrow \quad \pi_i = \rho^{i-n}\pi_n = \rho^{i-n}\frac{(n\rho)^n}{n!}\pi_0 = \frac{n^n\rho^i}{n!}\pi_0, \quad i = n, n+1, \ldots$$

Tasapainojakauma (2)

- Jakaumaehto:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = \pi_0 \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n\rho)^i}{i!} + \sum_{i=n}^{\infty} \frac{n^n \rho^i}{n!} \right) = 1 \qquad \text{(N)}$$

$$\Rightarrow \quad \pi_0 = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n\rho)^i}{i!} + \frac{(n\rho)^n}{n!} \sum_{i=n}^{\infty} \rho^{i-n} \right)^{-1}$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n\rho)^i}{i!} + \frac{(n\rho)^n}{n!(1-\rho)} \right)^{-1} = \frac{1}{\alpha + \beta}, \quad \text{jos } \rho < 1$$

$$\text{Merkintä}: \quad \alpha = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n\rho)^i}{i!}, \quad \beta = \frac{(n\rho)^n}{n!(1-\rho)}$$

Tasapainojakauma (3)

- Stabiilille systeemille (siis kun $\rho < 1$ eli $\lambda < n\mu$) systeemissä olevien asiakkaiden lkm:n X tasapainojakauma on siis seuraavanlainen:

$$\rho < 1 \quad \Rightarrow$$

$$P\{X = i\} = \pi_i = \begin{cases} \dfrac{(n\rho)^i}{i!} \cdot \dfrac{1}{\alpha+\beta}, & i = 0,1,\ldots,n \\ \dfrac{n^n \rho^i}{n!} \cdot \dfrac{1}{\alpha+\beta}, & i = n, n+1, \ldots \end{cases}$$

- **Huom**. Insensitiivisyys palveluajan jakauman suhteen
  - Itse asiassa PS-jonokurin tapauksessa tulos pätee yleisemminkin: eksponentiaalisen palveluaika-jakauman sijasta voidaan palveluajalle valita mikä tahansa jakauma, jonka odotusarvo on $1/\mu$
  - Voimme siis M/M/n-PS mallin sijasta tarkastella yleisempää M/G/n-PS mallia

Keskimääräinen viive

- Merkitään D:llä asiakkaan koko systeemissäoloaikaa eli viivettä
- Koska keskimääräinen systeemissäolevien lukumäärä $E[X]$ on sama kaikille työnsäilyttäville jonokureille, sama pätee Littlen kaavan nojalla myös keskimääräiselle viiveelle $E[D]$.
- Voidaan siis käyttää FIFO-jonokurille luennolla 8 johdettua tulosta:

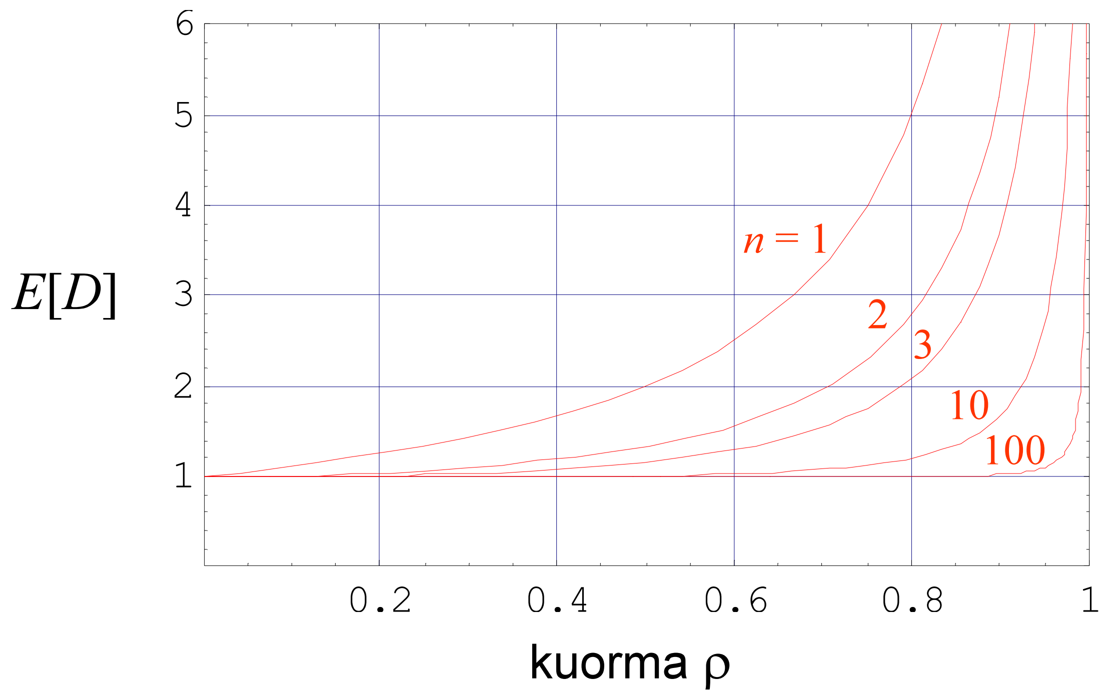
$$E[D] = \frac{1}{\mu} \cdot \left(\frac{p_W}{n(1-\rho)} + 1 \right)$$

  – missä p_w viittaa todennäköisyyteen

$$p_W = P\{X^* \geq n\} = \sum_{i=n}^{\infty} \pi_i = \sum_{i=n}^{\infty} \pi_0 \cdot \frac{n^n \rho^i}{n!} = \pi_0 \cdot \frac{(n\rho)^n}{n!(1-\rho)} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$$

Keskimääräinen viive $E[D]$ kuorman ρ funktiona

- Huom. Viiveen yksikkönä käytetty keskimääräistä palveluvaatimusta $E[S]$



Suhteellinen läpäisynopeus

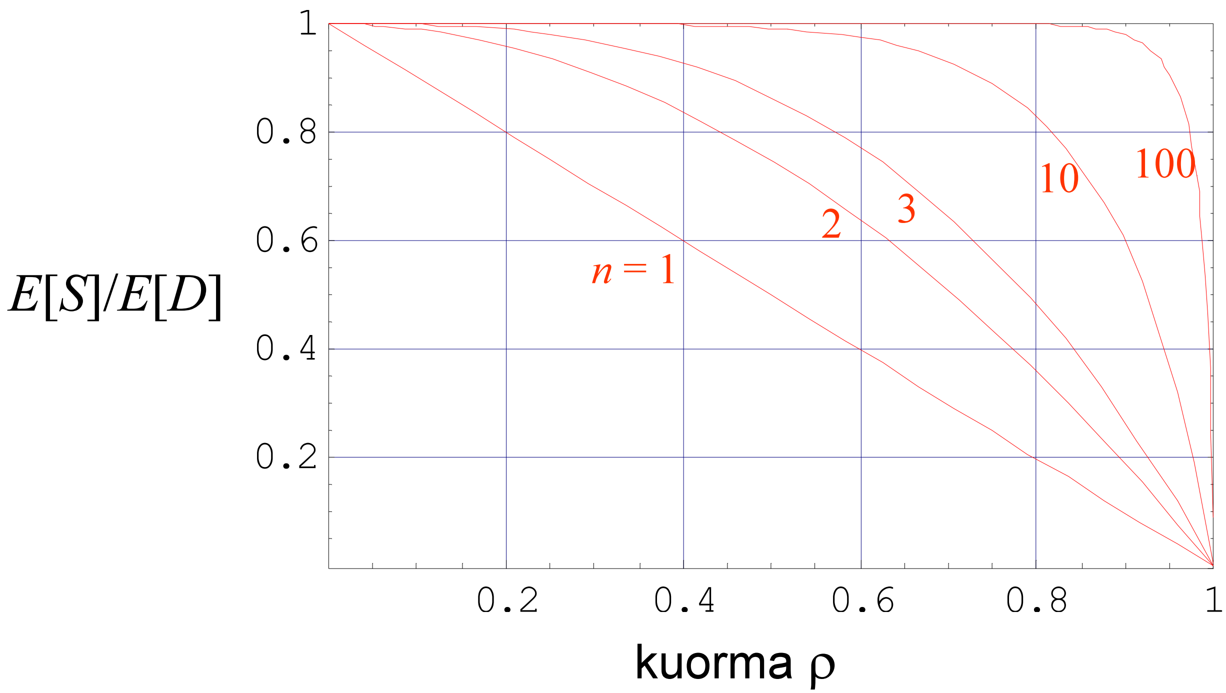
- Asiakkaan kokemaa palvelun laatua kuvaa suhteellinen läpäisynopeus $E[S]/E[D]$:

$$\frac{E[S]}{E[D]} = \frac{1}{\mu} \cdot \mu \cdot \frac{n(1-\rho)}{p_W(n)+n(1-\rho)} = \frac{n(1-\rho)}{p_W(n)+n(1-\rho)}$$

$$n = 1: \quad \frac{E[S]}{E[D]} = \frac{1-\rho}{p_W(1)+1-\rho} = 1-\rho$$

$$n = 2: \quad \frac{E[S]}{E[D]} = \frac{2(1-\rho)}{p_W(2)+2(1-\rho)} = 1-\rho^2$$

Suhteellinen läpäisynopeus $E[S]/E[D]$ kuorman ρ funktiona



Sisältö

- Kertausta: yksinkertainen liikenneteoreettinen malli
- M/M/1-PS (∞ asiakasta, 1 palvelija, ∞ asiakaspaikkaa)
- M/M/n-PS (∞ asiakasta, n palvelijaa, ∞ asiakaspaikkaa)
- Sovellus elastisen dataliikenteen mallintamiseen vuotasolla
- M/M/1/k/k-PS (k asiakasta, 1 palvelija, k asiakaspaikkaa)

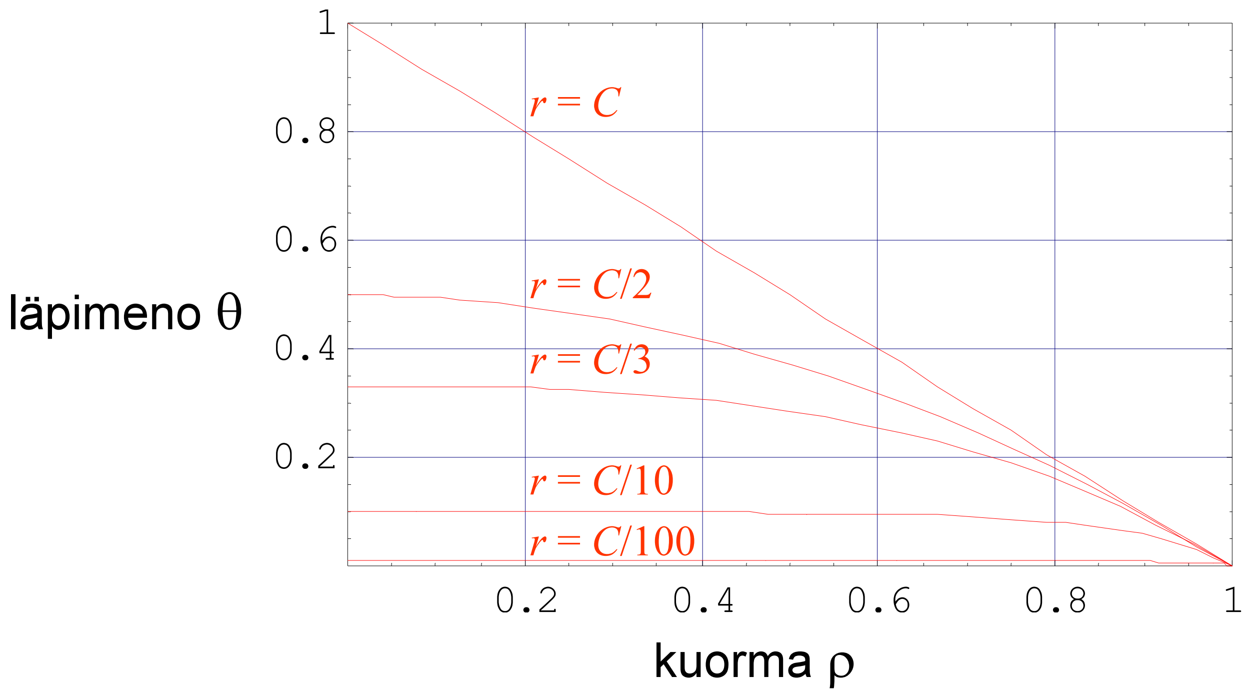
Sovellus elastisen dataliikenteen mallintamiseen vuotasolla

- $M/M/n$-PS-malli soveltuu elastisen dataliikenteen kuvaamiseen vuotasolla
  - asiakas = TCP-vuo
  - λ = uusien voiden saapumisintensiteetti (vuota per aikayks.)
  - r = yksittäisen vuon liityntälinkin nopeus (datayks. per aikayks.)
  - C = nr = voiden jakaman linkin bittinopeus (datayks. per aikayks.)
  - $E[L]$ = keskimääräinen vuon koko (datayks.)
  - $E[S]$ = $1/\mu$ = $E[L]/r$ = keskimääräinen vuon lähetysaika liityntänopeudella
  - ρ = $\lambda/(n\mu)$ = kuorma
- Palvelun laatua mittaa vuon läpimeno eli keskimäär. lähetysnopeus

$$\theta = \frac{E[L]}{E[D]} = \frac{r \cdot E[S]}{E[D]} = \frac{r \cdot n(1-\rho)}{p_W(n)+n(1-\rho)} = C \cdot \frac{(1-\rho)}{p_W(n)+n(1-\rho)}$$

Läpimeno θ kuorman ρ funktiona

– Huom. Läpimenon yksikkönä käytetty täyttä linkkinopeutta C

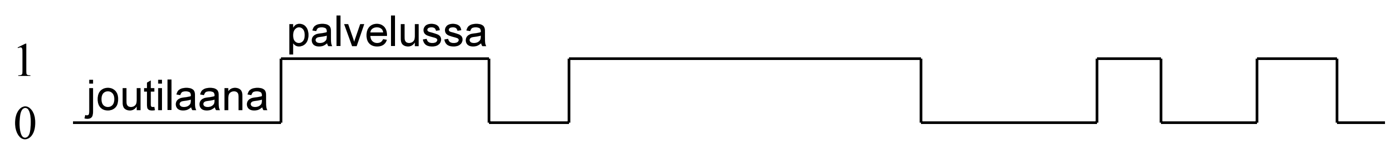


Sisältö

- Kertausta: yksinkertainen liikenneteoreettinen malli
- M/M/1-PS (∞ asiakasta, 1 palvelija, ∞ asiakaspaikkaa)
- M/M/n-PS (∞ asiakasta, n palvelijaa, ∞ asiakaspaikkaa)
- Sovellus elastisen dataliikenteen mallintamiseen vuotasolla
- M/M/1/k/k-PS (k asiakasta, 1 palvelija, k asiakaspaikkaa)

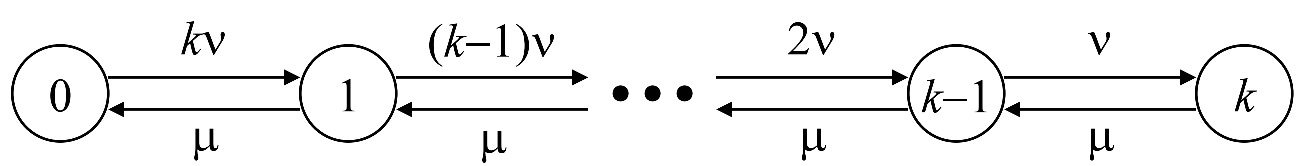
M/M/1/*k*/*k*-PS jono

- Tarkastellaan seuraavanlaista yksinkertaista liikenneteoreettista mallia:
  - **äärellinen** määrä riippumattomia asiakkaita ($k < \infty$)
    - asiakkaat **on-off-tyyppisiä** (siis välillä ‘joutilaita’ ja välillä ‘palvelussa’)
  - joutenoloajat IID noudattaen $\mathrm{Exp}(\nu)$-jakaumaa odotusarvolla $1/\nu$
  - yksi palvelija ($n = 1$)
  - palveluvaateet IID noudattaen $\mathrm{Exp}(\mu)$-jakaumaa odotusarvolla $1/\mu$
  - jokaisella asiakkaalla oma asiakaspaikka ($p = k$)
  - jonokuri: **PS**
- **Huom**.
  - Kendallin merkinnöillä kyseessä on **M/M/1/*k*/*k*-PS** jonomalli
- On-off tyyppinen asiakas:



Tilasiirtymäkaavio

- Tark. järjestelmässä olevien asiakkaiden lkm:ää $X(t)$ ajan t funktiona
  - Oletetaan, että $X(t) = i$ jollakin hetkellä t
  - Lyhyellä aikavälillä $(t, t+h]$ voi tapahtua seuraavaa:
    - jos $i < k$, niin tn:llä $(k - i)\nu h + o(h)$ joku joutilaina olevista asiakkaista siirtyy palveluun (aiheuttaen tilasiirtymän $i \to i + 1$)
    - jos $i > 0$, niin tn:llä $i(\mu/i)h + o(h) = \mu + o(h)$ jonkun systeemissä olevan asiakkaan palvelu päättyy (aiheuttaen tilasiirtymän $i \to i - 1$)
- Prosessi $X(t)$ on selvästikin Markov-prosessi tilasiirtymäkaavionaan



- **Huom**. Prosessi $X(t)$ on pelkistymätön sk-prosessi äärellisellä tila-avaruudella $S = \{0,1,\ldots,k\}$

Tasapainojakauma (1)

- Lähdetään jälleen liikkeelle lokaaleista tasapainoyhtälöistä:

$$\pi_i (k-i)\nu = \pi_{i+1}\mu \qquad \text{(LBE)}$$

$$\Rightarrow \quad \pi_i = \frac{\mu}{(k-i)\nu}\pi_{i+1}$$

$$\Rightarrow \quad \pi_i = \frac{1}{(k-i)!}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{k-i}\pi_k, \quad i = 0,1,\ldots,k$$

Tasapainojakauma (2)

- Sovelletaan sitten jakaumaehtoa:

$$\sum_{i=0}^{k} \pi_i = \pi_k \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{(k-i)!} \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{k-i} = 1 \qquad \text{(N)}$$

$$\Rightarrow \quad \pi_k = \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{(k-i)!} \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{k-i} \right)^{-1} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{i}}$$

$$\Rightarrow \quad \pi_i = \pi_k \cdot \frac{1}{(k-i)!} \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{i} = \frac{\frac{1}{(k-i)!} \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{k-i}}{\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{i}}$$

THE END