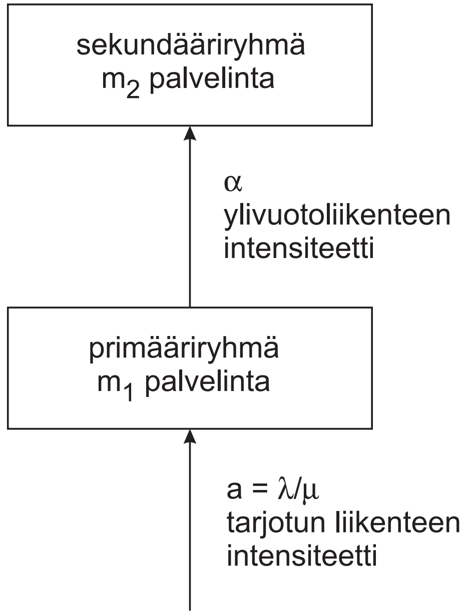
YLIVUOTOLIIKENNE

Ylivuotoliikenne menetysjärjestelmässä

Tarkastellaan piirikytkentäistä verkkoa, joka toimii menetysjärjestelmän tavoin (kutsut eivät jää odottamaan).

- Järjestelmään tarjotaan poissonista liikennettä intensiteetillä λ.
- Yhteyksien pitoajat ovat eksponentiaalisesti jakautuneita parametrilla μ.
- Tarjottu liikenneintensiteetti on $a = \lambda/\mu$.



Järjestelmä muodostuu kahdesta osasta:

- primääriryhmä: m_1 palvelinta
- sekundääriryhmä: m_2 palvelinta

- Järjestelmään tuleva liikenne tarjotaan ensi sijassa primääriryhmään.
- Vain jos kaikki primääriryhmän palvelimet ovat varattuja, saapuva kutsu ohjataan sekundääriryhmään,
  - tällä tavalla primääriryhmästä sekundääriryhmään ohjattua liikennettä kutsutaan ylivuotoliikenteeksi; merkitään sen intensiteettiä α:lla.
- Jos sekundääriryhmässäkin kaikki palvelimet ovat varattuja, saapuva kutsu estyy.

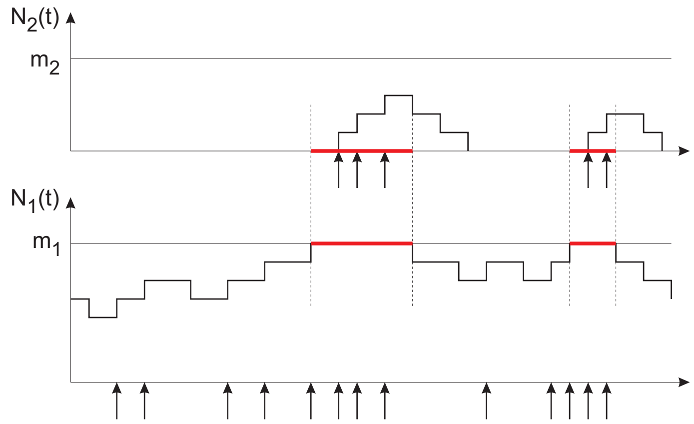
Ylivuotoliikenteen liikenneprosessi

Primääriryhmä ja sekundääriryhmä yhdessä muodostavat $m_1 + m_2$ palvelimen menetysjärjestelmän (Erlangin järjestelmä; $M/M/m/m$-jono, missä $m = m_1 + m_2$).

Primääriryhmä yksinään muodostaa m_1 palvelimen menetysjärjestelmän ($m = m_1$).

Järjestelmän kapasiteetin $m_1 + m_2$ jako kahteen osaan ei vaikuta koko järjestelmän käyttäytymiseen (esto on sama kuin $m_1 + m_2$ palvelimen menetysjärjestelmässä).

Järjestelmän johdot voidaan ajatella numeroiduiksi. Saapuva kutsu otetaan kuljetettavaksi alimman numeron omaavaan vapaaseen johtoon.

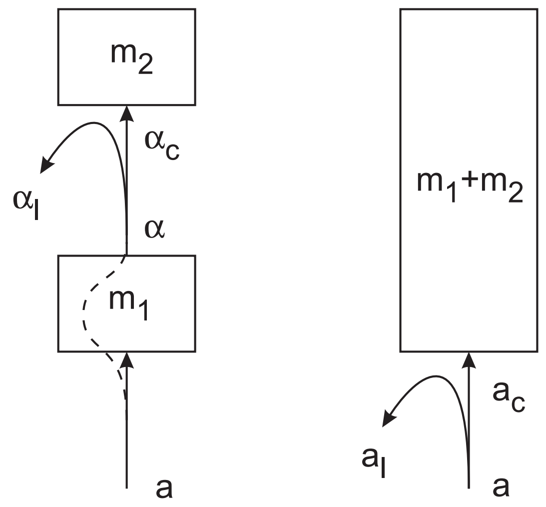


$$\begin{cases} N_1 & \sim \text{ katkaistu } (m_1) \text{ Poisson-jakauma} \\ N = N_1 + N_2 & \sim \text{ katkaistu } (m_1 + m_2) \text{ Poisson-jak.} \\ N_2 = N - N_1 & \quad \text{sekundääriryhmän miehitys} \end{cases}$$

Huom. Vaikka N ja N_1 ovat erikseen insensitiivejä (riippumattomia pitoajan jakaumasta), niin N_2:n jakauma ei ole insensitiivi.

Ylivuotoliikennettä syntyy ainoastaan silloin, kun primääriryhmä on estotilassa. Primääriryhmän estojaksot muodostavat aikaikkunoita, joiden aikana saapuva Poisson liikenne ohjautuu sekundääriryhmään. Ylivuotoliikenteen saapumisprosessi on ns. katkottu Poisson-prosessi (IPP, Interrupted Poisson Process).

Ylivuotoliikenteen esto



Ylivuotoliikenne α

(primääriryhmässä 'estynyt' liikenne)

$$\alpha = a \cdot E(m_1, a)$$

missä $E(m, a)$ on Erlangin estofunktio.

Lopulta estynyt liikenne $\alpha_\ell = a_\ell$

(sekundääriryhmässä estynyt liikenne)

$$a_\ell = a \cdot E(m_1 + m_2, a)$$

Ylivuotoliikenteen (kutsu)esto

$$B_2 = \frac{aE(m_1 + m_2, a)}{aE(m_1, a)} \qquad \boxed{B_2 = \frac{E(m_1 + m_2, a)}{E(m_1, a)}}$$

Voidaan osoittaa, että $B_2 > E(m_2, \alpha)$

Ylivuotoliikenteen kokema esto on suurempi kuin, mitä olisi vastaavan liikenneintensiteetin omaavan Poisson-liikenteen esto m_2:n johdon sekundääriryhmässä.

Tämä johtuu siitä, että IPP-liikenne on purskeisempaa kuin tavallinen Poisson-liikenne.

Ylivuotoliikenteen esto (jatkoa)

Esimerkki

Oletetaan, että tarjotun liikenteen intensiteetti on $a = 5$ erl.

Primääri- ja sekundääriryhmien koot: $m_1 = 5$ ja $m_2 = 1$

$$\begin{cases} \text{ylivuotoliikenne} & \alpha \;=\; 5 \cdot E(5,5) \;=\; 5 \cdot 0.285 \;=\; 1.42 \\ \text{lopulta estynyt liikenne} & a_\ell \;=\; 5 \cdot E(6,5) \;=\; 5 \cdot 0.192 \;=\; 0.96 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{ylivuotoliikenteen esto} & B_2 \;=\; \dfrac{a_\ell}{\alpha} \;=\; \dfrac{E(6,5)}{E(5,5)} \;=\; 0.67 \\ \text{esto Poisson-liikenteellä} & E(1, 1.42) \;=\; 0.59 \end{cases}$$

Ylivuotoliikenteen piikikkyys

Joskus on hyödyllistä karakterisoida saapuvaa liikenneprosessia kertomalla, millaisen miehitysjakauman se saisi aikaan äärettömän suuressa johtoryhmässä.

Ylivuotoliikenteen karakterisoimiseksi tällä tavalla oletetaan nyt, että sekundääriryhmä on ääretön, $m_2 = \infty$.

Tällöin kaikki ylivuotanut liikenne kuljetetaan sekundääriryhmässä ja pätee

$$\boxed{\mathrm{E}[N_2] = aE(m_1, a) = \alpha}$$

Myös N_2:n varianssi tässä tapauksessa voidaan laskea. Johto on verraten monimutkainen. Tulos tunnetaan <u>Riordanin kaavana</u>:

$$\boxed{\mathrm{V}[N_2] = \alpha \left(1 - \alpha + \frac{a}{m_1 + 1 - a + \alpha}\right)}$$

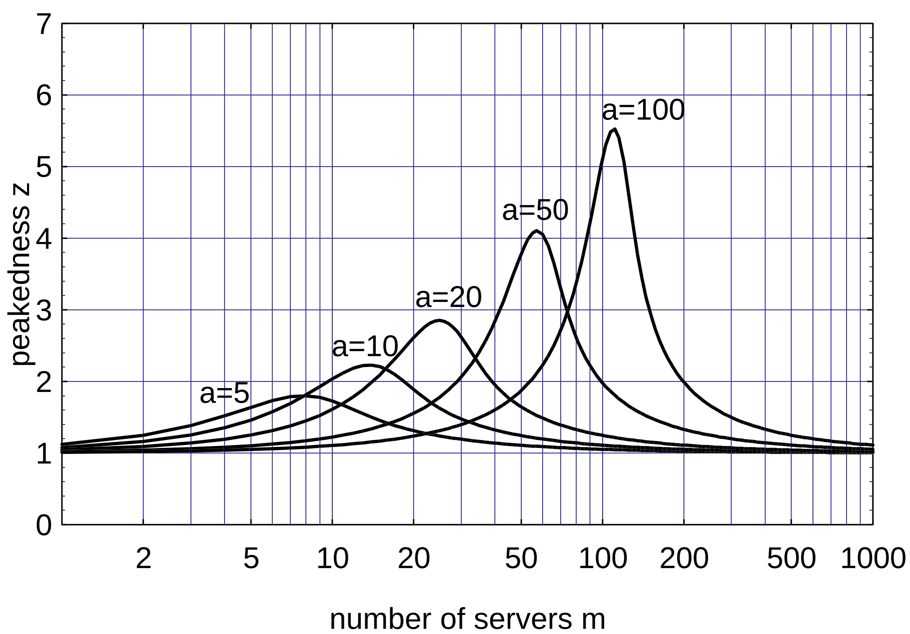
Miehityksen varianssin ja odotusarvon suhdetta kutsutaan <u>piikikkyystekijäksi</u>. (Poisson-saapumisprosessin tapauksessa miehitysjakauma on Poisson(a)-jakauma, jonka piikikkyys on 1.)

$$\boxed{z = \frac{\mathrm{V}[N_2]}{\mathrm{E}[N_2]} = 1 - \alpha + \frac{a}{m_1 + 1 - a + \alpha}} \qquad \text{missä } \alpha = aE(m_1, a)$$

Ylivuotoliikenteen piikikkyys (jatkoa)

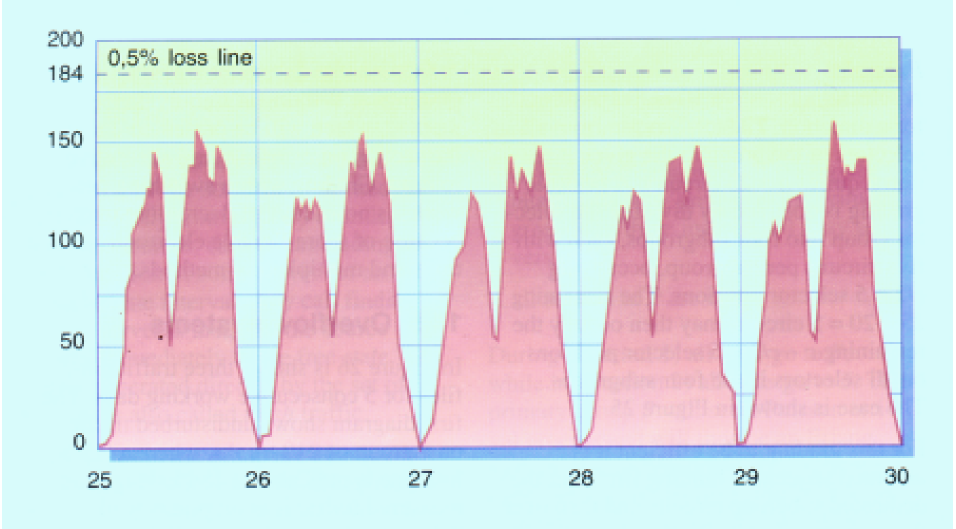
Piikikkyystekijä on m_1:n ja a:n funktio, $z = z(m_1, a)$.

Kun a pidetään kiinteänä ja m_1 vaihtelee
- aluksi pienillä m_1:n arvoilla $z \approx 1$ (koko Poisson-liikenne vuotaa yli)
- sitten z saavuttaa maksimin (kun $m_1 \approx a$)
- lopulta hyvin suurilla m_1:n arvoilla $z \to 1$ (ylivuodot harvinaisia yksittäisiä tapahtumia)



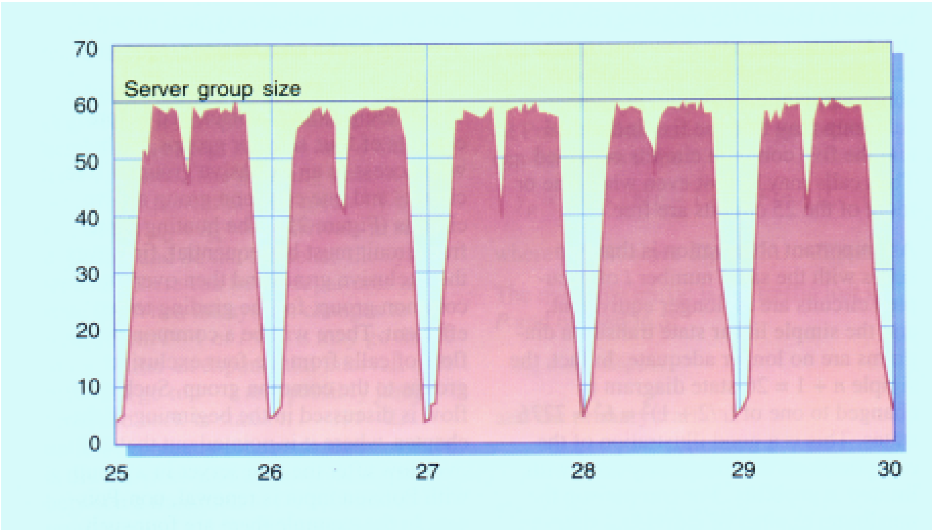
Esimerkki ylivuotoliikenteestä

Viereisessä kuvassa nähdään tarjotun liikenteen käyttäytyminen viiden vuorokauden ajalta [a]



Allaolevissa kuvissa nähdään sama liikenne 60 palvelimen primääriryhmässä sekä ylivuotoliikenne. Primääriryhmän liikenne on tasaisempaa (leikkautunut) kuin tarjottu liikenne, kun taas ylivuotoliikenne on piikikkäämpää kuin tarjottu liikenne.

[a] Lähde: A. Myskja, Telektronikk 2/3 (1995).



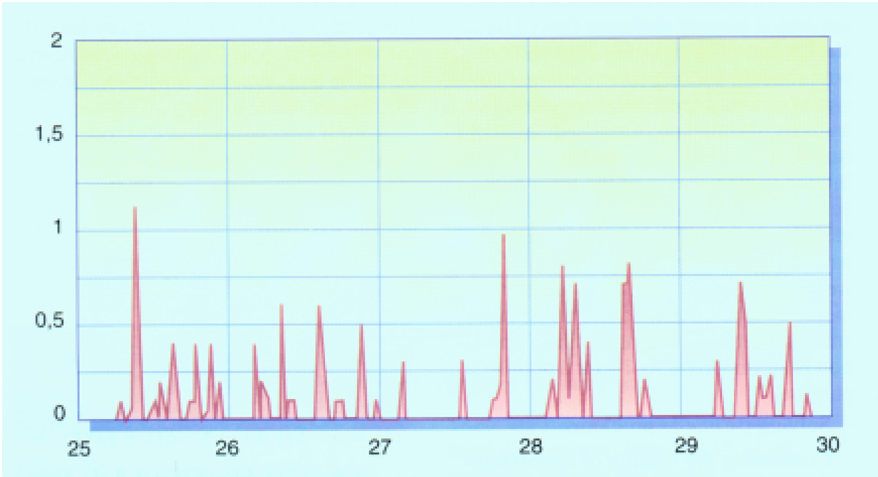


Figure 26 Observed undisturbed (Poisson) traffic, smoothed traffic and overflow

Haywardin approksimaatio

Haywardin approksimaatio on likimääräinen menetelmä eston laskemiseksi ei-poissoniselle liikenteelle (esim. ylivuotoliikenne).

Lähtökohtana on havainto, että poissonisen liikenteen miehitykselle N äärettömässä palvelinsysteemissä pätee:

$$\boxed{\mathrm{E}[N] = a \quad \mathrm{V}[N] = a} \qquad N \sim \mathrm{Poisson}(a)$$

Sen sijaan ei-poissonisella liikenteellä on yleensä $\mathrm{V}[N] \neq \mathrm{E}[N]$.

Pyrkimyksenä Haywardin approksimaatiossa on kuvata ei-poissonista liikennettä 'ekvivalentilla poissonisella liikenteellä' ja soveltaa tämän jälkeen Erlangin kaavaa eston laskentaan.

Idea on siinä, että lukumäärämiehityksen N sijasta tarkastellaan <u>varatun kaistan</u> R käyttäytymistä.

Olkoon

$$\begin{cases} c \;=\; & \text{yhden yhteyden vaatima kaista (johtojen määrä)} \\ R \;=\; N \cdot c \;=\; & \text{miehitystilassa } N \text{ varattu kaista} \end{cases}$$

Haywardin approksimaatio (jatkoa)

Poissoniselle liikenteelle pätee

$$\begin{cases} \mathrm{E}[R] = \mathrm{E}[c \cdot N] = c \cdot a \\ \mathrm{V}[R] = \mathrm{V}[c \cdot N] = c^2 \cdot a \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{V}[R]}{\mathrm{E}[R]} = c$$

Olkoon annettuna ei-poissoninen lähde, jolla miehityksen keskiarvo ja varianssi tunnetaan

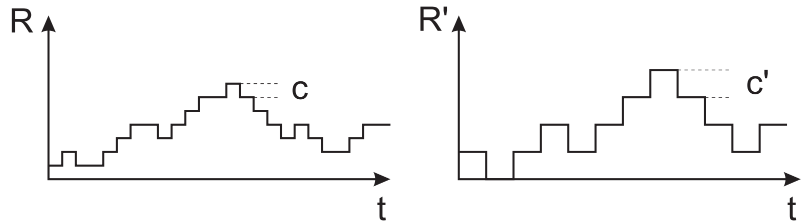
$$\begin{cases} \mathrm{E}[N] = a \\ \mathrm{V}[N] = v \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{E}[R] = c \cdot a \\ \mathrm{V}[R] = c^2 \cdot v \end{cases}$$

Korvataan tämä nyt poissonisella liikenteellä

$$\begin{cases} a' = \text{liikenteen intensiteetti} \\ c' = \text{yhden yhteyden vaatima kaista} \end{cases}$$

siten, että otetun kaistan keskiarvo ja varianssi ovat samat sekä todellisella liikenteellä että malliliikenteellä:

$$\mathrm{E}[R] = \mathrm{E}[R'], \quad \mathrm{V}[R] = \mathrm{V}[R']$$



Varsinainen idea on siis siinä, että ekvivalentilla Poisson-liikenteellä myös yhden yhteyden kaista on otettu vapaaksi parametriksi.

Yksi kuvitteellinen ekvivalentin liikenteen yhteys saattaa siten vaatia esim. 1.6 johtoa.

Haywardin approksimaatio (jatkoa)

Momenttien yhtäsuuruusvaatimuksesta seuraavat ehdot mallin parametreille a' ja c'

$$\begin{cases} a' \cdot c' &= a \cdot c \\ a' \cdot c'^2 &= v \cdot c^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} a' = \dfrac{a^2}{v} & \text{ekvivalentti intensiteetti} \\ c' = c \cdot \dfrac{v}{a} & \text{ekvivalentti kaista} \end{cases}}$$

Vastaavasti modifioidaan systeemin kokoa. Jos systeemissä on alunperin m johtoa eli kaistaa on $m \cdot c$ kapasiteettiyksikköä, niin siihen mahtuu $m \cdot c/c'$ ekvivalenttia yhteyttä. Siten ekvivalentissa systeemissä on m' johtoa:

$$m' = \frac{m \cdot c}{c'} = m \cdot \frac{a}{v}$$

Nyt approksimoidaan estoa ekvivalentin poissonisen liikenteen estolla

$$\boxed{B \approx E(m', a') = E(m \cdot \frac{a}{v}, \frac{a^2}{v}) = E(\frac{m}{z}, \frac{a}{z})}$$

Haywardin approksimaatio
missä $z = v/a$

Kuorma palvelinta kohti pysyy samana: $(a/z)/(m/z) = a/m$.
Kun $z > 1$, systeemi pienenee $\Rightarrow$ esto kasvaa.

Haywardin approksimaatio (jatkoa)

Ei-poissoninen liikenne voi olla peräisin useasta riippumattomasta lähteestä. Jos jokaiselle erikseen tunnetaan miehityksen keskiarvo a_i ja varianssi v_i, niin kokonaisliikenteen vastaavat parametrit ovat

$$\boxed{\begin{cases} a = \sum_i a_i \\ v = \sum_i v_i \end{cases}}$$

Haywardin approksimaatio kertoo tällöin likimäärin kokonaisliikennevirran eston järjestelmässä, jossa on m johtoa,

$$B \approx E(m \cdot \frac{a}{v}, \frac{a^2}{v}) = E(\frac{m}{z}, \frac{a}{z}) \qquad \text{missä } z = v/a$$

Sen sijaan jää määräämättä, miten tämä esto jakautuu eri komponenttien kesken.

ERT-menetelmä (Equivalent Random Theory)

ERT-menetelmä tunnetaan myös nimellä Wilkinsonin menetelmä.

Tämä on toinen likimääräismenetelmä eston laskemiseksi ei-poissonisella liikenteellä.

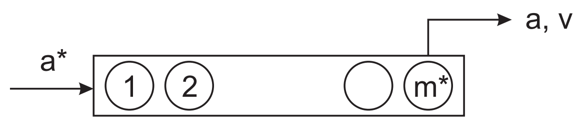
Tarjottua liikennettä kuvaavat

$$\begin{cases} a &= \text{liikenteen intensiteetti} = \text{keskimääräinen miehitys äärettömässä systeemissä} \\ v &= \text{miehityksen varianssi äärettömässä systeemissä} \end{cases}$$

Usean riippumattoman komponenttivirran tapauksessa on

$$a = \sum_i a_i, \qquad v = \sum_i v_i$$

ERT-menetelmässä ideana on kuvitella liikenteen (a, v) syntyneen ylivuotoliikenteenä fiktiivisestä kanavasta



$$\begin{cases} a^* &= \text{tarjottu liikenne} \\ m^* &= \text{palvelimien (johtojen) lkm} \\ & \quad\ \text{fiktiivisessä järjestelmässä} \end{cases}$$

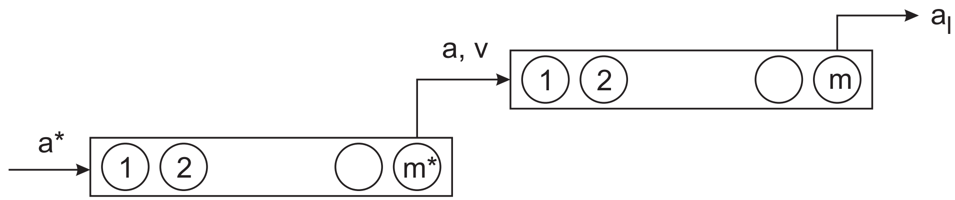
a^* ja m^* määrätään siten, että fiktiivisen kanavan ylivuotoliikenteen intensiteetti on a ja varianssi v.

ERT-menetelmä (jatkoa)

Momenttien sovittamisehdot ovat (ylivuotoliikenteen varianssi saadaan Riordanin kaavasta)

$$\boxed{\begin{cases} a = a^* \cdot E(m^*, a^*) \\ v = a\left(1 - a + \dfrac{a^*}{m^* + 1 - a^* + a}\right) \end{cases}} \quad \Rightarrow \quad a^*,\, m^*$$

Jos kanavassa, johon ei-poissoninen liikenne tarjotaan, on m johtoa, voidaan lopulta ylivuotaneen liikenteen intensiteetti a_ℓ laskea



$$\boxed{a_\ell = a^* \, E(m^* + m, a^*)}$$

Arvio liikenne-estolle on vastaavasti

$$\boxed{B = \frac{a_\ell}{a}}$$

ERT-menetelmä (jatkoa)

Yhtälöparin ratkaisu joudutaan etsimään numeerisesti.

Lisäongelmana on, että yleensä ratkaisua ei löydy millään kokonailukuarvolla m^*.

Joudutaan joko käyttämään lisäapproksimaatioita tai laajentamaan Erlangin estofunktion määritelmä kaikille reaaliluvuille.

Tämä onkin mahdollista tehdä:

$$\boxed{E(m,a) = \frac{a^m e^{-a}}{\Gamma(m+1,a)}}$$

missä nimittäjässä esiintyy epätäydellinen gammafunktio

$$\Gamma(m+1,a) = \int_a^\infty t^m e^{-t} dt$$

Osittaisintegroinnin avulla voidaan näyttää, että m:n ollessa kokonaisluku pätee

$$\Gamma(m+1,a) = \int_a^\infty t^m e^{-t} dt = m! e^{-a} \left(1 + \frac{a}{1!} + \cdots + \frac{a^m}{m!}\right)$$

jolloin kaava palautuu tuttuun muotoon

$$E(m,a) = \frac{\dfrac{a^m}{m!}}{1 + \dfrac{a}{1!} + \cdots + \dfrac{a^m}{m!}}$$

ERT-menetelmä (jatkoa)

Ratkaisussa voidaan käyttää myös likiarvokaavoja. Erään tällaisen on esittänyt Rapp (1964)

$$\begin{cases} a^* = v + 3z(z-1) & \text{missä } z = v/a \\ m^* = \dfrac{a^*(a+z)}{a+z-1} - a - 1 & \text{(tämä on eksakti relaatio; approksimaatio on } a^*\text{:n arvossa)} \end{cases}$$

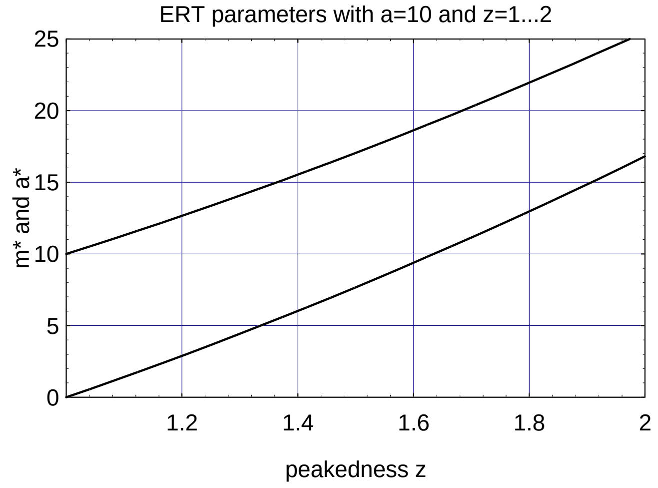
Approksimaatio ei ole tarkka, jos a on pieni ja z on suuri.

ERT-menetelmä (jatkoa)

ERT-menetelmän parametrit

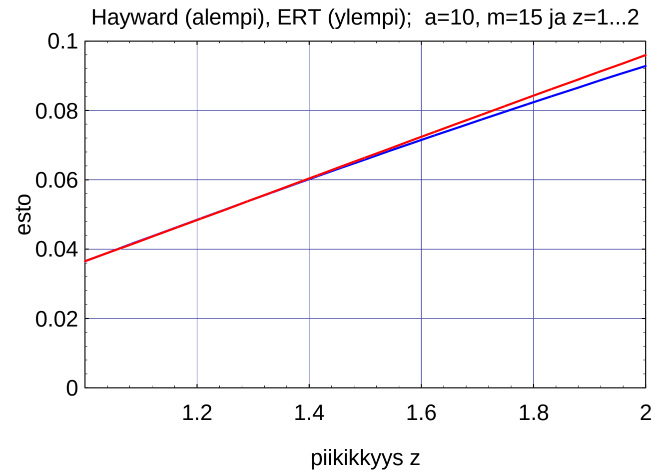
Yhtälöparista ratkaistut ERT-mentelmän mukaisen mallisysteemin parametrit m^* (alempi käyrä) ja a^* (ylempi käyrä) on esitetty viereisessä kuvassa, kun mallinnettavalla liikenteellä on $a = 10$ ja piikikkyys $z = v/a$ vaihtelee välillä $z = 1 \ldots 2$.

Ratkaisussa on käytetty tarkkaa Erlangin funktion laajennusta reaalilukuisille johtojen lukumäärille.

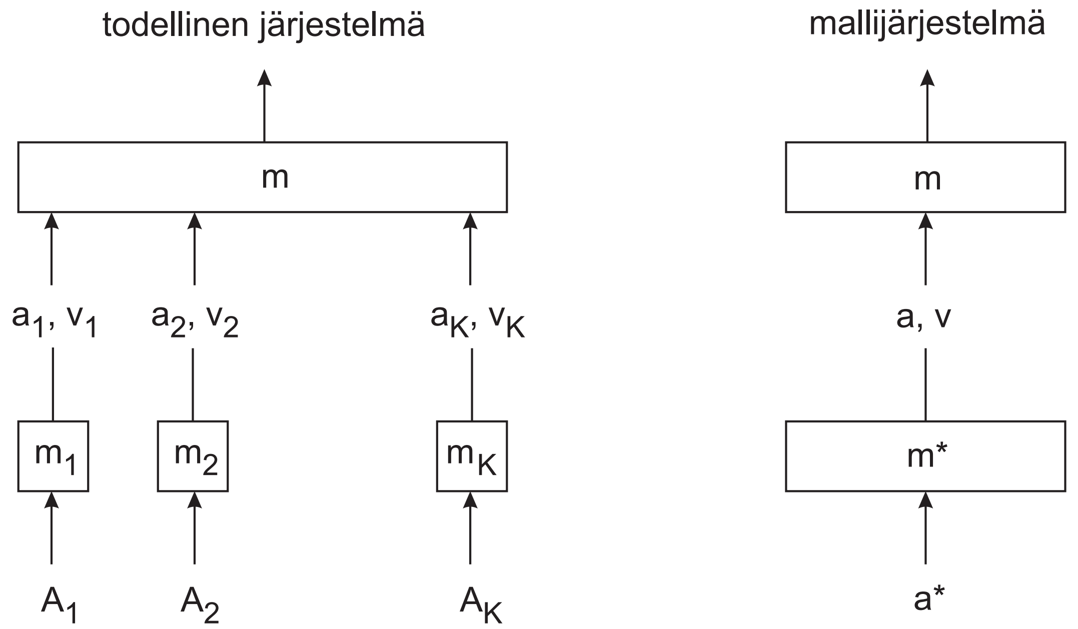


Haywardin ja ERT-menetelmien vertailu

Viereisessä kuvassa on laskettu esto liikenteelle, jolla $a = 10$ ja $z = 1 \ldots 2$ ja joka tarjotaan $m = 15$ johdon systeemiin. Laskenta on tehty sekä Haywardin menetelmällä ja ERT-menetelmällä. Tässä tapauksessa tulokset ovat lähellä toisiaan. Ei voida sanoa, kumpi on 'oikea'. Liikenteen kokema esto riippuu todellisuudessa muustakin kuin vain parametreista a ja $v = z \cdot a$ (ja m). Pelkästään näiden parametrien avulla 'oikeata tulosta' ei tiedetä.



ERT-menetelmä (yhteenveto)



- Yhdistetty ylivuotoliikenne käsitellään ikään kuin se olisi peräisin yhdestä kanavasta.
- Etsitään a^* ja m^* siten, että mallijärjestelmän ylivuotoliikenteellä on oikea a ja v, missä $a = \sum_i a_i,\ v = \sum_i v_i$.
- Ylivuotokanavan esto on $\dfrac{a^* E(m+m^*, a^*)}{a}$; kokonaisesto $\dfrac{a^* E(m+m^*, a^*)}{\sum_i A_i}$