TEKNILLINEN KORKEAKOULU	**Laskuharjoitus 1**
Tietoverkkolaboratorio	8.11.2005
S-38.3143 Jonoteoria, sl-2005	Virtamo / Koskinen

1. Kahdesta kolikosta toinen on tavallinen kun taas toisessa kolikossa on molemmilla puolilla kruuna. Näistä kolikoista valitaan toinen umpimähkään ja sitä heitetään m kertaa kaikkien m heiton päätyessä kruunaan. Mikä on todennäköisyys, että valittu kolikko on tavallinen? Laske arvo kun $m = 1, 2, 3$.

2. Sovella keskiarvon ja varianssin ketjusääntöjä

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X] &= \mathrm{E}[\mathrm{E}[X|Y]] \\ \mathrm{V}[X] &= \mathrm{E}[\mathrm{V}[X|Y]] + \mathrm{V}[\mathrm{E}[X|Y]] \end{aligned}$$

tapaukseen $X = X_1 + \ldots + X_N$, missä X_i:t ovat riippumattomia identtisesti jakautuneita satunnaismuuttujia (keskiarvo m, varianssi σ^2) ja N on positiivinen kokonaislukuarvoinen satunnaismuuttuja (keskiarvo n, varianssi ν^2). Ehdollista laskenta N:n arvoihin.

3. Oletetaan, että $X_1,\ X_2, \ldots, X_n$ ovat geometrisesti jakautuneita satunnaismuuttujia $X_i \sim \mathrm{Geom(p_i)}$. Mitä jakaumaa noudattaa $\min(X_1,\ X_2, \ldots, X_n)$?

4. Olkoon $S = X_1 + \ldots + X_N$, missä $X_i \sim \mathrm{Exp}(\mu)$ ovat riippumattomia samoin jakautuneita satunnaismuuttujia ja N näistä riippumaton geometrisesti jakautunut satunnaismuuttuja, $\mathrm{P}\{N = k\} = (1 - p)p^{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$. Johda S:n häntäjakautuma $G(x) = \mathrm{P}\{S > x\}$.

5. Oletetaan, että webbisurffailuistunnon kesto noudattaa eksponenttijakaumaa keskiarvolla 36 min.

   a) Mikä on todennäköisyys, että istunto kestää 30 min tai vähemmän?

   b) Mikä on todennäköisyys, että istunto kestää vähintään tunnin?

   c) Istunto on kestänyt jo tunnin. Mikä on todennäköisyys, että se kestää ainakin toisen tunnin?

   d) Istunnoista 90 $\%$ kestää vähemmän kuin R minuuttia. Mikä on R:n arvo?

6. Olkoon X eksponentiaalisesti jakautunut satunnaismuuttuja. Tekemättä mitään laskuja kerro, mikä seuraavista kolmesta väitteestä on tosi. Perustele.

   a) $\mathrm{E}[X^2|X > 1] = \mathrm{E}[(X + 1)^2]$

   b) $\mathrm{E}[X^2|X > 1] = \mathrm{E}[X^2] + 1$

   c) $\mathrm{E}[X^2|X > 1] = (1 + \mathrm{E}[X])^2$