

1. Nelitilaisen Markovin ketjun tilasiirtymämatriisi on

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

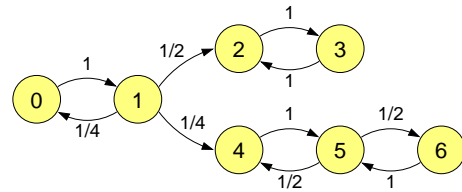
Piirrä ketjun tilasiirtymäkaavio ja päättele, mitkä tilat ovat transientteja ja mitkä palautuvia.

2. Markovin ketjulla on oheisen kuvan mukainen tilakaavio:

a) Luokittele ketjun tilat.

b) Laske positiivisesti palautuvien luokkien luokkakohtaiset tasapainojakaumat.

c) Laske $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^n$ numeerisesti matriisiker-
tolaskulla. Mitä havaitset?



3. Aika absorptioon. Kolmitilaisella Markovin ketjulla (tilat $i = 1, \dots, 3$) on seuraava siirtymätodennäköisyysmatriisi:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tila 3 on absorboiva tila. Merkitään T_i :llä keskimääräistä aikaa (askelten määrää), joka tilassa i olevalta systeemiltä kuluu absorboivaan tilaan siirtymiseen ($T_3 = 0$). Kirjoita yhtälöt T_i :lle, $i = 1, 2$, perustuen siihen, että seuraava siirtymä $i \rightarrow j$ vie yhden askeleen ja markovisuuden nojalla siitä eteenpäin kuluu keskimäärin T_j askelta absorboivaan tilaan pääsemiseksi. Ratkaise yhtälöt.

4. Laatikossa on neljä eri väristä palloa ja sieltä poimitaan sattumanvaraisesti kaksi palloa kerrallaan. Ensimmäinen pallo maalataan aina samanväriseksi kuin toinen. Tätä jatketaan kunnes kaikki pallot ovat samanvärisiä. Mikä on nostokierrosten odotusarvo?
5. Eräällä Markovin ketjulla on seuraava siirtymätodennäköisyysmatriisi

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

a) Määrää tasapainotilatodennäköisyyksien vektori π .

b) Laske matriisipotenssien \mathbf{P}^n , $n = 0, 1, \dots$, generoiva funktio (matriisi) $(\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1}$.

c) Päättele edellisestä \mathbf{P}^n :n yleinen muoto? (Ohje: Kirjoita tuloksena saamasi generoiva funktio z :n lausekkeena, jossa esiintyy kertoimina z :sta riippumattomia vakiomatriiseja. Käytä tämän jälkeen osamurtohajotelmaa.) Päättele uudelleen tasapainotilatodennäköisyydet.

6. Kahden jonon muodostamassa suljetussa järjestelmässä kiertää n asiakasta. Palvelun päätyttyä asiakas siirtyy toiseen jonoon (tai suoraan toiseen palvelimeen, mikäli tämä on vapaa). Palveluajat ovat eksponentiaalisesti jakautuneita parametreilla μ . Laske millä todennäköisyydellä jonossa 1 on j asiakasta, $j = 0, \dots, n$.