TEKNILLINEN KORKEAKOULU
Tietoverkkolaboratorio
S-38.3143 Jonoteoria, sl-2005

Laskuharjoitus 6
13.12.2005
Virtamo / Koskinen

1. Autoja saapuu palvelupisteeseen Poisson-prosessin mukaisesti keskimääräisellä nopeudella 4 autoa tunnisssa. Kussakin autossa on 1, 2, tai 3 asiakasta todennäköisyyksillä $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$. Kunkin asiakkaan palveluaika on eksponentiaalisesti jakautunut keskiarvolla 3 min. Laske asiakkaan keskimääräinen odotusaika. Ohje: Kunkin ryhmän ensimmäisen asiakkaan keskimääräinen odotusaika voidaan selvittää tarkastelemalla sopivaa $M/G/1$-jonoa. Tutki erikseen odotusaikaa ryhmän sisällä.

2. Pollaczek-Khinchinin kaava odotusajan W tiheysfunktion Laplace-muunnokselle on

$$W^*(s) = \frac{s(1-\rho)}{s - \lambda + \lambda S^*(s)}$$

missä $S^*(s)$ on palveluajan S tiheysfunktion Laplace-muunnos ja $\rho = \lambda\overline{S}$. Johda uudelleen PK-keskiarvokaava odotusajalle tähän tulokseen nojautuen.

3. $M/G/1$-jonon kiirejakson B Laplace-muunnos $B^*(s)$ toteuttaa Takácsin yhtälön

$$B^*(s) = S^*(s + \lambda - \lambda B^*(s)),$$

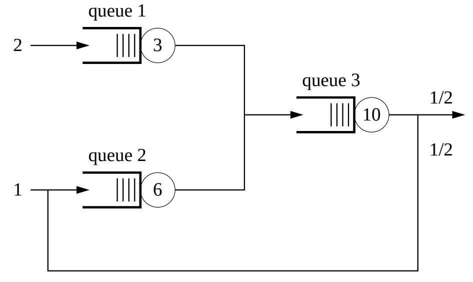
missä $S^*(s)$ on palveluajan S Laplace-muunnos.

a) Johda $B^*(s)$:n lauseke $M/M/1$-jonon tapauksessa eli kun $S^*(s) = \mu/(\mu + s)$.

b) Johda seuraavat lausekkeet B:n kahdelle ensimmäiselle momentille:

$$\overline{B} = \frac{\overline{S}}{1-\rho}, \qquad \overline{B^2} = \frac{\overline{S^2}}{(1-\rho)^3}.$$

4. Kuvan mukaisen avoimen Jacksonin jonoverkon jonoihin 1 ja 2 saapuu ulkopuolelta Poissoniset asiakasvirrat intensiteeteillä 2 ja 1 (asiakasta/s). Palveluajat ovat eksponentiaalisesti jakautuneita kuvassa annetuilla nopeusparametreilla (asiakasta/s). Laske a) eri jonojen läpi kulkevat asiakasvirrat, b) eri jonojen keskimääräiset miehitykset ja verkon keskimääräinen kokonaismiehitys, c) jonoihin 1 ja 2 saapuneiden asiakkaiden keskimääräiset viipymät verkossa ja satunnaisesti valitun verkkoon saapuvan asiakkaan keskimääräinen viipymä verkossa.



5. Suljetun jonoverkon muodostaa kolme renkaaksi kytkettyä jonoa. Palvelimien palvelunopeudet ovat μ, 2μ ja 4μ. Verkossa kiertää kaksi asiakasta. Laske jonojen keskimääräiset miehitykset sekä asiakkaan keskimääräinen kiertoaika renkaassa.

6. Burken oma todistus teoreemalleen: Olkoot T_1 ja T_2 kaksi peräkkäistä palvelun päättymishetkeä $M/M/1$-jonossa ja olkoon $G_j(t)$ yhteistodenäköisyys sille, että hetkellä $T_1 + t$ järjestelmässä on j asiakasta ja että $T_2 > T_1 + t$.

   a) Johda differentiaaliyhtälöiden ryhmä funktioille $G_j(t)$ ja osoita, että alkuehdolla $G_j(0) = \pi_j^*$ ratkaisu on $G_j(t) = \pi_j^* e^{-\lambda t}$, missä π_j^* on todennäköisyys, että välittömästi mielivaltaisen poistumisen jälkeen systeemissä on j asiakasta (luennolla on näytetty, että π_j^* noudattaa tasapainojakaumaa, $\pi_j^* = \pi_j$). Osoita tämän perusteella, että väliaika $T_2 - T_1$ on eksponentiaalisesti jakautunut parametrilla λ.

   b) Osoita, että väliajan $T_2 - T_1$ pituus ja jononpituus N_{T_2+} heti hetken T_2 jälkeen ovat riippumattomia ja edelleen, että eri ulostuloväliajat ovat toisistaan riippumattomia ja N_t riippumaton poistumishetkistä ennen hetkeä t. Ohje: Todista, että tapahtuman $\{T_2 - T_1 \in (t, t + dt)$ ja $N_{T_2+} = j\}$ todennäköisyys on $G_{j+1}(t)\mu dt$ ja käytä hyväksi sitä, että N_t on Markov-prosessi.