

1. Epäluotettava tietoliikenneyhteys muodostuu neljästä peräkkäisestä linkistä. Jokaisella linkillä todennäköisyys sille, että linkille lähetetty bitti (0 tai 1) vastaanotetaan linkin toisessa päässä virheettömästi, on 90 % ja siis 10 %:n todennäköisyydellä vastaanotettu bitti on muuttunut toiseksi. Mikä on todennäköisyys sille, että koko yhteyden läpi kulkenut bitti saapuu perille virheettömästi?
2. Kussakin n :stä laatikosta on $m > n$ palloa. Laatikossa i , $i = 1, \dots, n$, on i punaista palloa ja $m - i$ vihreätä palloa. Laatikosta valitaan yksi umpimähkään ja siitä poimitaan mielivaltainen pallo. Osoittautuu, että pallo on punainen. Mikä on todennäköisyys, että laatikko, josta se nostettiin on numeroltaan j ?
3. Oletetaan, että jatkuvien satunnaismuuttujien X ja Y yhteistiheysfunktio on

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2 - x - y, & \text{kun } 0 < x < 1 \text{ ja } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$$

- a) Määrää reunajakaumat $f_X(x)$ ja $f_Y(y)$. Ovatko X ja Y riippumattomia?
 - b) Määrää ehdolliset tiheysfunktiot $f_{X|Y}(x, y)$ ja $f_{Y|X}(y, x)$.
 - c) Laske $E[X|Y = y]$ ja $E[Y|X = x]$.
4. Sovella keskiarvon ja varianssin ketjusääntöjä

$$\begin{aligned} E[X] &= E[E[X|Y]] \\ V[X] &= E[V[X|Y]] + V[E[X|Y]] \end{aligned}$$

tapaukseen $X = X_1 + \dots + X_N$, missä X_i :t ovat riippumattomia identtisesti jakautuneita satunnaismuuttujia (keskiarvo m , varianssi σ^2) ja N on positiivinen kokonaislukuarvoinen satunnaismuuttuja (keskiarvo n , varianssi ν^2). Ehdollista laskenta N :n arvoihin.

5. K_1 ja K_2 ovat ei-negatiivisia kokonaislukuarvoisia satunnaismuuttujia, joiden pistetodennäköisyydet ovat $P\{K_1 = k\} = (1 - \alpha)\alpha^k$ ja $P\{K_2 = k\} = (1 - \beta)\beta^k$, $k = 0, 1, \dots$. Määrää summan $K = K_1 + K_2$ jakauma $P\{K = k\}$, $k = 0, 1, \dots$. Käytä apuna generoivia funktioita ja sovelta osamurtohajoitelmia.
6. Olkoon X kokonaislukuarvoinen satunnaismuuttuja, $X = 0, 1, 2, \dots$, ja $\mathcal{G}(z)$ sen generoiva funktio. Tunnetusti generoivan funktion avulla voidaan laskea $E[X] = \frac{d}{dz}\mathcal{G}(z)|_{z=1} = \mathcal{G}'(1)$ ja $E[X^2] = \frac{d}{dz}z\frac{d}{dz}\mathcal{G}(z)|_{z=1} = \mathcal{G}''(1) + \mathcal{G}'(1)$. Oletetaan, että X on positiiviarvoinen, ts. $P\{X = 0\} = 0$. Mikä on tällöin generoivan funktion avulla lausuttuna a) $E[1/X]$ ja b) $E[1/X^2]$? Ohje: avainsana on integrointi.