

1. Kokeita suoritetaan peräkkäin. Jos kaksi viimeistä koetta olivat onnistuneita, niin seuraavan kokeen onnistumistodennäköisyys on 0.8, muuten sen onnistumistodennäköisyys on 0.5. Mikä osuus kokeista onnistuu hyvin pitkässä koesarjassa? Ohje: Tutki järjestelmää 4-tilaisena Markovin ketjuna, jossa systeemin tilan määrittelevät kahden viimeksi suoritettun kokeen tulokset.
2. Jatkuva-aikaisella Markovin prosessilla on viereisen kuvan mukainen tilasiirtymäkaavio, missä  $\alpha = 1/s$ ,  $\beta = 2/s$ .
  - a) Ratkaise prosessin tasapainotodennäköisyydet  $\pi_i$ .
  - b) Ratkaise vastaavan upotetun Markovin ketjun tasapainotodennäköisyydet  $\pi_i^{(e)}$ .
  - c) Mitkä ovat eri tilojen keskimääräiset elinajat  $\bar{T}_i$ ? Totea numeerisesti, että  $\pi_i = \pi_i^{(e)} \bar{T}_i / \sum_j \pi_j^{(e)} \bar{T}_j$ .
3. Ratkaise tasapainotodennäköisyydet SK-prosesseille (tila-avaruus  $i = 0, 1, 2, \dots$ ), joiden tilasiirtymänopeudet ovat a)  $\lambda_i = \lambda$ ,  $\mu_i = i\mu$ , b)  $\lambda_i = \lambda/(i + 1)$ ,  $\mu_i = \mu$ , missä  $\lambda$  ja  $\mu$  ovat vakioita.
4. Pakettiverkon eräällä linkillä kulkee keskimäärin 10 pakettia/s. Pakettien saapumisten voidaan olettaa tapahtuvan Poisson-prosessin mukaisesti. Kukin paketti on muista riippumatta kuittauspaketti todennäköisyydellä 30 %. Tarkastellaan mielivaltaista sekunnin pituista ajanjaksoa:
  - a) Mikä on todennäköisyys sille, että linkillä kulkee ainakin yksi kuittauspaketti?
  - b) Mikä on pakettien kokonaismäärän odotusarvo, kun on havaittu, että linkillä on kulkenut 5 kuittauspakettia?
  - c) Kun tarkasteluaikana on havaittu kaikkiaan 8 pakettia, millä todennäköisyydellä niistä tasan 2 on kuittauspaketteja?
5. Eräässä liikennemittauksessa seurataan päivittäin klo 15.00-15.10 saapuneiden puheluiden lukumäärää  $N$ . Voidaan olettaa, että saapumiset noudattavat Poisson-prosessia intensiteetillä  $\lambda$ , joka on kyseisenä aikavälinä vakio mutta vaihtelee päivästä toiseen. Mittausten perusteella on todettu, että  $N$ :n odotusarvo on 25 ja varianssi 29. Mitkä ovat  $\lambda$ :n odotusarvo ja hajonta? Ohje: käytä keskiarvon ja varianssin laskentakaavoja:  $E[X] = E[E[X|Y]]$  ja  $V[X] = E[V[X|Y]] + V[E[X|Y]]$ .
6. Autoja kulkee maantiellä pisteen A ohi keskimäärin 10 minuutin välein. Väliajat ovat toisistaan riippumattomia ja samoin jakautuneita väliaikojen hajonnan (siis varianssin neliöjuuren) ollessa 6 minuuttia. Liftari tulee tienvarteen pisteeseen A satunnaisena ajanhetkenä. Kuinka kauan liftari joutuu keskimäärin odottelemaan seuraavan auton tuloa?

