

1. Ratkaise tasapainotodennäköisyydet SK-prosesseille (tila-avaruus $i = 0, 1, 2, \dots$), joiden tilasiirtymänopeudet ovat a) $\lambda_i = \lambda$, $\mu_i = i\mu$, b) $\lambda_i = \lambda/(i + 1)$, $\mu_i = \mu$, missä λ ja μ ovat vakioita.
2. Eräässä pelissä äänimerkkejä tulee poissonisesti nopeudella λ aikavälillä $(0, T)$, $T > 1/\lambda$. Pelaaja voittaa vain siinä tapauksessa, että äänimerkkejä ylipäättään tulee ja hän onnistuu painamaan nappia viimeisen äänimerkin kohdalla (vain yksi painallus sallittu). Pelaaja valitsee seuraavan pelistrategian: hän painaa nappia ensimmäisen äänimerkin kohdalla, joka tulee (jos tulee) tietyn kiinteän ajanhetken $s \leq T$ jälkeen.
 - a) Millä todennäköisyydellä pelaaja voittaa?
 - b) Mikä s :n arvo maksimoi voittotodennäköisyyden ja mikä maksimin arvo on?
3. On havaittu, että Poisson-prosessista on välillä $(0, t)$ osunut yksi saapuminen, $N(0, t) = 1$. Osoita, että tähän tietoon ehdollistettuna saapumishetki τ on tasanjakautunut kyseisellä välillä. Ohje: Laske saapumishetken τ ehdollinen kertymäfunktio $P\{\tau \leq s \mid \text{yksi saapuminen välillä } (0, t)\}$
4. Järjestelmään saapuu asiakkaita Poisson-prosessin mukaisesti intensiteetillä λ . Kuhunkin asiakkaaseen liittyy muista riippumatta tuotto Y , jonka oletetaan saavan kokonaislukuarvoja todennäköisyyksillä $p_i = P\{Y = i\}$, $i = 1, 2, \dots$. Merkitään X_t :llä tulokertymää aikavälillä $(0, t)$.
 - a) Johda lauseke $E[X_t]$:lle ja $V[X_t]$:lle.
 - b) Päättele, että $X_t \sim E_1 + 2E_2 + 3E_3 + \dots$, missä E_i :t ovat toisistaan riippumattomia ja $E_i \sim \text{Poisson}(p_i \lambda t)$.
5. Tietoliikenneverkkoon saapuu paketteja eri lähteistä yhteensä miljoona kappaletta sekunnissa. Lähde- kohdeosoiteparin perusteella määräytyvien reittien pituudet vaihtelevat huomattavasti. Pakettien verkossa viettämä aika riippuu paitsi kuljetun reitin pituudesta myös verkon ruuhkaisuudesta. Kyseisellä ajalla oletetaan olevan jakauma: 1 ms (90 %), 10 ms (7 %), 100 ms (3 %). Kuinka monta pakettia verkossa keskimäärin on kerrallaan matkalla?
6. Erään pelkistymättömän Markovin prosessin tilat, joiden tasapainotodennäköisyydet π_i tunnetaan, voidaan jakaa kahteen joukkoon $A = \{1, 2, \dots, n\}$ ja $B = \{n + 1, n + 2, \dots\}$ siten, että joukkojen välillä on nolasta poikkeavat tilasiirtymänopeudet vain tilasta n tilaan $n + 1$ ja takaisin, nimittäin $q_{n,n+1} = \lambda$ ja $q_{n+1,n} = \mu$.

Kirjoita Littlen tulosta käyttäen lauseke keskimääräiselle ajalle, joka kuluu siirtymästä $n \rightarrow n + 1$ siihen, kun systeemi seuraavan kerran palaa joukkoon A (siirtymä $n + 1 \rightarrow n$) eli ajalle, jonka systeemi keskimäärin kerrallaan viettää tilajoukossa B .