

1. Oletetaan, että terveyskeskuksessa on paikalla aina yksi lääkäri (24 tuntia vuorokaudessa) ja asiakkaita saapuu Poisson-prosessi mukaisesti intensiteetillä  $\lambda$ . Kunkin asiakkaan palveluaika noudattaa eksponentiaalijakaumaa keskiarvolla 30 minuuttia. Määää maksimisaapumisintensiteetti, siten että 95% asiakkaista pääsee palveluun kolmen vuorokauden sisällä ensimmäisestä yhteydenotosta (vrt. hoitotakuu).
2. Osoita, että M/G/1-LIFO-jonossa tasapainojakauma  $\pi_n = (1 - \rho)\rho^n$  on voimassa palveluajan jakaumasta riippumatta. Ohje: Totea, että asiakas, jonka saapuessa systeemissä on  $j - 1$  asiakasta, saa palvelua silloin ja vain silloin, kun järjestelmä on tilassa  $N = j$ . Aika, jonka systeemi viettää tilassa  $N = j$  muodostuu niin ollen niiden asiakkaiden täydellisistä palveluajoista, jotka saapuvat tilaan  $N = j - 1$ . Kuinka monta tällaista saapumista tapahtuu pitkänä aikavälinä  $T$ ?
3. Tarkastellaan M/M/1/K-jonoa, jonka tilat ovat  $0, 1, \dots, K$ . Johda todennäköisyys  $P_n$  sille, että jono, joka alkuhetkellä on tilassa  $n$ , tulevaisuudessa tyhjenee aikaisemmin kuin vuotaa ensimmäisen kerran yli. Ohje: Lisää systeemiin kuvitteellinen tila  $K + 1$ ; siirtyminen tilaan  $K + 1$  tarkoittaa samaa kuin, että systeemi vuotaa yli. Päte  $P_0 = 1$  ja  $P_{K+1} = 0$ . Kirjoita tiloille  $n = 1, \dots, K$  todennäköisyys  $P_n$  todennäköisyyksien  $P_{n-1}$  ja  $P_{n+1}$  avulla. Ratkaise yhtälöt.
4. Asiakkaita saapuu kahden palvelimen systeemiin poissonisesti nopeudella  $\lambda = 5/\text{min}$ . Jos palvelin 1 on vapaa, asiakas menee tähän palvelimeen. Jos palvelin 1 on varattu, mutta palvelin 2 on vapaa, asiakas menee palvelimeen 2. Jos molemmat palvelimet ovat varattuja, asiakas poistuu palaamatta uudelleen. Saatuaan palvelun jommaltakummalta palvelimelta, asiakas poistuu. Palveluajat ovat eksponentiaalisesti jakautuneita parametreilla  $\mu_1 = 4/\text{min}$  ja  $\mu_2 = 2/\text{min}$ . a) Mikä on systeemiin sisälle pääsevän asiakkaan systeemissä keskimäärin viettämä aika? b) Minkä osan ajasta palvelin 2 on varattu?
5. Asiakkaita saapuu  $M/\text{Erlang}(k, \mu)/1$ -järjestelmään Poisson-prosessin mukaisesti intensiteetillä  $\lambda$ . Mitkä ovat asiakkaan keskimääräiset viipymä- ja odotusajat järjestelmässä?
6. Jos yhden palvelimen jonojärjestelmässä asiakkaalta peritään jonkin säännön mukaan määrätty maksu, niin systeemin keskimääräinen ansionopeus  $= \lambda \cdot$  (asiakkaan keskimäärin suorittama maksu), missä  $\lambda$  on keskimääräinen asiakasvirta järjestelmän läpi.

Sovella tulosta M/G/1-jonoon, jossa maksu määrättyy seuraavasti: veloitus aikayksikköä kohti on sama kuin asiakkaan kulloinkin jäljelläoleva palveluaika. Laske keskimääräisen maksun suuruus. Osoita, että yllämainitun ansionopeuden ja systeemin keskimääräisen aikaveloituksen yhtäsuuruus saa muodon:

$$\overline{W} = \lambda (\overline{X} \overline{W} + \overline{X^2}/2),$$

missä  $W$  on odotusaika ja  $X$  palveluaika. Ratkaise  $\overline{W}$ . Minkä tuloksen olet johtanut?