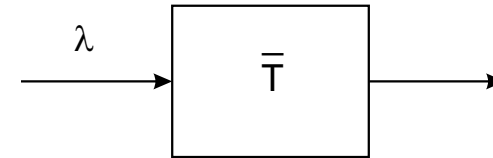


## Littlen tulos

### Littlen lause

Littlen tuloksena tai Littlen lauseena tunnettu tulos on hyvin yksinkertainen relaatio järjestelmään tulevan asiakasvirran, keskimäärin järjestelmässä sisällä olevien asiakkaiden lukumäärän sekä asiakkaan keskimääräisen viipymän välillä.



Tarkastellaan mitä tahansa järjestelmää “mustana laatikkona” ja määritellään

$$\begin{cases} \lambda & = \text{saapumisintensiteetti (aikayksikössä keskimäärin saapuvien asiakkaiden lkm )} \\ \bar{T} & = \text{asiakkaan keskimääräinen viipymä järjestelmän sisällä} \\ \bar{N} & = \text{keskimääräinen asiakkaiden lukumäärä järjestelmän sisällä} \end{cases}$$

Littlen lause sanoo

$$\boxed{\bar{N} = \lambda \bar{T}}$$

Lause on hyvin käyttökelpoinen yleisyytensä vuoksi

- Järjestelmästä ei ole tehty mitään oletuksia
  - mustaan laatikkoon voidaan rajata mikä tahansa osa järjestelmästä
- Tuloprosessi saa olla mikä vain
  - erityisesti ei edellytetä poissonisuutta
  - prosessin kuitenkin pitää olla stationaarinen

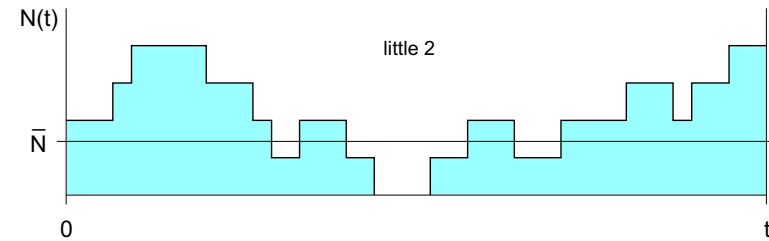
## Littlen lauseen käyttö

Jonoteoriassa on usein helpompaa johtaa lauseke järjestelmässä sisällä olevien asiakkaiden lukumäärän odotusarvolle. Tällöin Littlen lausetta voidaan käyttää vastaavan viipymääajan laskemiseen,  $\bar{N} \rightarrow \bar{T}$ .

Joskus tulosta sovelletaan käänteiseen suuntaan eli viipymääajoista päätellään keskimääräiset asiakaslukumäärät,  $\bar{T} \rightarrow \bar{N}$ .

## Littlen lauseen perustelu

Järjestelmässä sisällä olevien asiakkaiden lukumäärä muodostaa stokastisen prosessin  $N_t$ . Sen keskiarvo pitän aikavälin  $t$  yli voidaan laskea jakamalla kuvion mukainen pinta-ala välin pituudella  $t$ .



- Jokainen asiakas tuo pinta-alaan keskimäärin lisän  $\bar{T}$ .
- Asiakkaita saapuu aikavälissä  $t$  keskimäärin  $\lambda t$ .
- Pinta-ala on siten  $(\lambda t)\bar{T} \Rightarrow \bar{N} = \lambda\bar{T}$ .

Intuitiivinen tapa: Ajatellaan, että jokaiselta asiakkaalta peritään maksu, jonka suuruus on  $(T/\text{min})$  mk eli markka per sisälläolominuutti. Järjestelmän saama keskimääräinen tuotonopeus on siten toisaalta  $\lambda\bar{T}$  mk/min mutta toisaalta  $\bar{N}$  mk/min, koska jokaisesta sisälläolevasta asiakkaasta saatava tulo on 1 mk/min.

## Sovellus: liikenneintensiteetti

Tarkastellaan joitain verkon elementtejä esimerkiksi johtoja, portteja, modeemeita tai mitä tahansa loogisia yksiköitä, joita asiakas ottaa käyttöönsä yhden kerrallaan. Olkoon

$$\begin{cases} \lambda = \text{järjestelmään tulevien asiakkaiden saapumisintensiteetti} \\ \bar{T} = \text{keskimääräisen varausajan pituus} \end{cases}$$

Suuretta  $a = \lambda \bar{T}$  kutsutaan liikenteen liikenneintensiteetiksi.

- Liikenneintensiteetti on paljas luku, mutta sen ‘yksiköksi’ merkitään usein erlang tai erl (tanskalaisen liikenneteorian uranuurtajan A.K. Erlangin kunniaksi).

Littlen tuloksen avulla tulkittuna liikenneintensiteetti on sama kuin keskimäärin yhtäaikaa varattuina olevien elementtien lukumäärä.

Esimerkki. Vaihteen keskujohdolla kulkee 150 puhelua tunnissa. Yhden puhelun keskipituus on 3 min. Keskusjohdon liikenneintensiteetti on

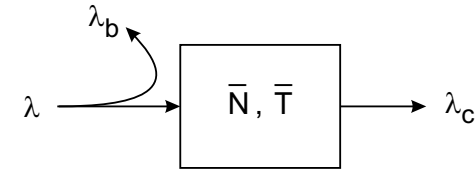
$$a = 150 \text{ h}^{-1} \times 3 \text{ min} = 7.5 \text{ erl}$$

Toisin sanoen johdolla on yhtäaikaisesti käynnissä keskimäärin 7.5 puhelua.

## Tarjottu, estynyt ja kuljetettu liikenne

Todellisilla järjestelmillä on aina äärellinen kapasiteetti ja osa järjestelmään pyrkivistä asiakkaista joudutaan hylkäämään (esto). Tämän vuoksi on tarpeen erotella seuraavat käsitteet

$$\begin{cases} \lambda & = \text{tarjottu liikennevirta (saapumisintensiteetti)} \\ \lambda_b & = \text{estynyt liikennevirta} \\ \lambda_c & = \text{kuljetettu liikennevirta (välitetty liikenne)} \end{cases}$$



Littlen lause sellaisenaan pätee järjestelmään sisälle saapuvien asiakkaiden virtaan

$$\boxed{\bar{N} = \lambda_c \bar{T}} \quad \text{kuljetetun liikenteen liikenneintensiteetti}$$

Littlen lausetta voidaan soveltaa myös laajentamalla järjestelmän rajaa kuvan osoittamalla tavalla. Tällöin kaikki asiakkaat saapuvat järjestelmään (saapumisnopeus  $\lambda$ ), mutta osa saa hyvin tylyä palvelua (välitön ulosheitto).

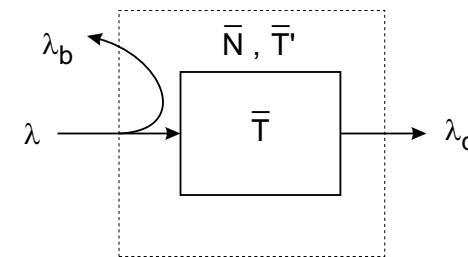
Keskimääräinen viipymä järjestelmässä on nyt

$$\bar{T}' = \frac{\lambda_b}{\lambda} \cdot 0 + \frac{\lambda_c}{\lambda} \bar{T} = \frac{\lambda_c}{\lambda} \bar{T}$$

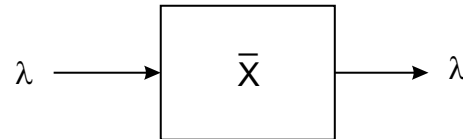
Littlen lause antaa

$$\bar{N} = \lambda \bar{T}' = \lambda_c \bar{T}$$

mikä on sama tulos kuin edellä.



## Yhden palvelimen kuljetettu liikenneintensiteetti



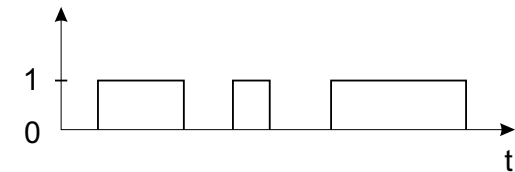
Tarkastellaan yhden palvelimen järjestelmää, johon mahtuu vain yksi asiakas kerrallaan.

$$\begin{cases} \lambda & = \text{palvelimen läpi kulkeva asiakasvirta (palvellut asiakkaat)} \\ \bar{X} & = \text{keskimääräinen palveluaika} \end{cases}$$

Littlen lauseen mukaan on  $\bar{N} = \lambda \bar{X}$ .

Toisaalta keskimääräinen miehitys voidaan laskea suoraan

$$\bar{N} = p_0 \cdot 0 + p_1 \cdot 1 = p_1$$



$$\begin{cases} p_0 & = \text{todennäköisyys, että palvelin on vapaa} \\ p_1 & = \text{todennäköisyys, että palvelin on käytössä; palvelimen käyttöaste } (\rho) \end{cases}$$

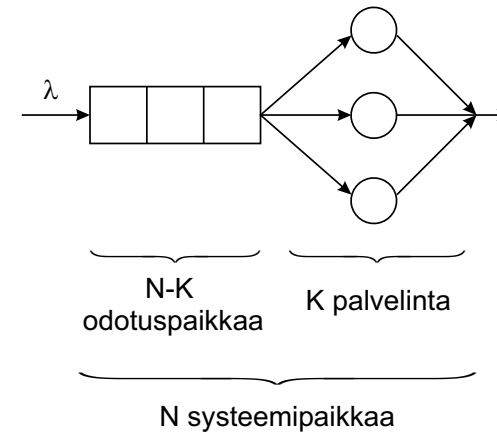
$$\boxed{a = \lambda \bar{X} = \rho}$$

Yhden palvelimen järjestelmässä (kuljetettu) liikenneintensiteetti on sama kuin palvelimen käyttöaste.

## Littlen tulos: esimerkki

Järjestelmässä on

$$\begin{cases} N & \text{paikkaa kaikkiaan} \\ K & \text{palvelinta, keskimääräinen palveluaika } \bar{X} \\ N - K & \text{odotuspaikkaa} \end{cases}$$



Oletetaan, että saapumisnopeus on niin suuri, että järjestelmä on koko ajan saturoitunut (kaikki paikat täynnä). Merkitään  $\lambda$ :lla läpimennyttä liikennevirtaa.

Kysymys: Mikä on keskimääräinen viipymäaika  $\bar{T}$  koko järjestelmässä?

Sovelletaan nyt Littlen tulosta kaksi kertaa: ensin palvelinjoukkoon ja sitten koko järjestelmään.

### 1. Palvelinjoukko

Keskimääräinen viipymä =  $\bar{X}$

$$K = \lambda \bar{X} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{K}{\bar{X}}$$

### 2. Koko järjestelmä

$$N = \lambda \bar{T} \quad \Rightarrow \quad \bar{T} = \frac{N}{\lambda} = \frac{N}{K} \cdot \bar{X}$$

$$\boxed{\bar{T} = \frac{N}{K} \cdot \bar{X}}$$